Exercice 3 — 5 points

On désigne par (E) l'équation : $z^4+4z^2+16=0$ d'inconnue complexe z.

1 . Résoudre dans l'ensemble des nombre complexes : $Z^2+4Z+16=0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2 . On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.

Calculer a^2 sous forme algébrique.
En déduire les solutions dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation :
$z^2=-2+2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3 . Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z=x+iy$ où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $\bar{z}=x-iy$.

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$
- Pour tout nombre complexe z et et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$

4 . Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\bar{z}$ est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation (E).
On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Correction :

On désigne par (E) l'équation : $z^4 + 5z^2 + 16 = 0$ d'inconnue z.

1 . $Z^2 + 4Z + 16 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4\times 16 = 16 - 64 = -48 = 48\,i^2 = (4\sqrt{3}\,i)^2$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$$Z_1 = \frac{-4+4\sqrt{3}\,i}{2} = -2+2\sqrt{3}\,i \text{ et } Z_2 = \frac{-4-4\sqrt{3}\,i}{2} = -2-2\sqrt{3}\,i$$

$|Z_1|^2 = 4+4\times 3 = 16 \qquad |Z_1| = 4$

$Z_1 = 4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\cos\theta_1 = -\frac{1}{2} \qquad \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$Z_1 = \boxed{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} \qquad Z_2 = \boxed{4e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

$S = \{ 4e^{i\frac{2\pi}{3}} ; 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \}$

2 . $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$

$a^2 = (1+i\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2\times 1\times i\sqrt{3} + i^2\times\sqrt{3}^2 = 1+2i\sqrt{3}-3 = -2+i2\sqrt{3}$

$z^2 = a^2 \Leftrightarrow z^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (z-a)(z+a) = 0 \Leftrightarrow (z = a \text{ ou } z = -a)$

$a = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$

$-a = -1 - i\sqrt{3}$

$S = \{1 + i\sqrt{3} ; -1 - i\sqrt{3}\}$

3 . restitution organisée de connaissances

$z_1 = x_1 + i\,y_1 \quad x_1 \in \mathbb{R} \quad y_1 \in \mathbb{R} \qquad \bar{z}_1 = x_1 - i\,y_1$

$z_2 = x_2 + i\,y_2 \quad x_2 \in \mathbb{R} \quad y_2 \in \mathbb{R} \qquad \bar{z}_2 = x_2 - i\,y_2$

$z_1\times z_2 = (x_1 + i\,y_1)(x_2 + y_2) = x_1 x_2 + i\,y_1 x_2 + i\,x_1 y_2 + i^2 y_1 y_2$

$z_1\times z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$z_1\overline{z}_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\bar{z}_1\times\bar{z}_2 = (x_1 - i\,y_1)(x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - i\,y_1 x_2 - i x_1 y_2 + i^2 y_1 y_2$

$\bar{z}_1\times\bar{z}_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

donc $\boxed{z_1\overline{z}_2 = \bar{z}_1\times\bar{z}_2}$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a :
($\overline{z^n}$)= $(\overline{z})^n$

- **Initialisation**
  Pour n=1 z^1 =z et $(\overline{z})^1=\overline{z}$
  la propriété est vérifiée pour n=1

- **Hérédité**
  Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que :
  $(\overline{z^n}) = (\overline{z})^n$ et on doit démontrer que $(\overline{z^{n+1}}) = (\overline{z})^{n+1}$
  Or $(\overline{z^{n+1}}) = \overline{z z^n} = \overline{z}\times(\overline{z^n})=\overline{z}\times(\overline{z})^n=(\overline{z})^{n+1}$

- **Conclusion**
  Le principe de récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\boxed{(\overline{z^n})=(\overline{z})^n}$

4 . z est une solution de (E) donc $z^4 + 4z^2 + 16=0$
alors $(\overline{z})^4 + 4(\overline{z})^2 + 16 = (\overline{z^4}) + 4(\overline{z^2}) + 16 = \overline{z^4+4z^2+16} = \overline{0} = 0$ (car $\overline{4}=4$ et $\overline{16}=16$)
donc $\overline{z}$ est **solution** de (E).

Nous avons vu que $a^2 = Z_1$ donc a et $-a$ sont solutions de (E).

Conséquence : $\overline{a}$ et $-\overline{a}$ sont aussi solutions de (E).

On admet que (E) a au plus 4 solutions.

Conclusion :
Les **4 solutions** de (E) dans l'ensemble des nombres complexes sont :
a=$1+i\sqrt{3}$; -a=$-1-i\sqrt{3}$; $\overline{a}=1-i\sqrt{3}$; $-\overline{a}=-1+i\sqrt{3}$