Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité — 5 points

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC,ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E,F et G les milieux respectifs des côtés [AB],[BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace.

1 . On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).

a. Donner les coordonnées des points D et F.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

d. Calculer les coordonnées du point H.

e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2 . On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\cdot\overrightarrow{DF}$.
On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que la mesure α soit maximale.

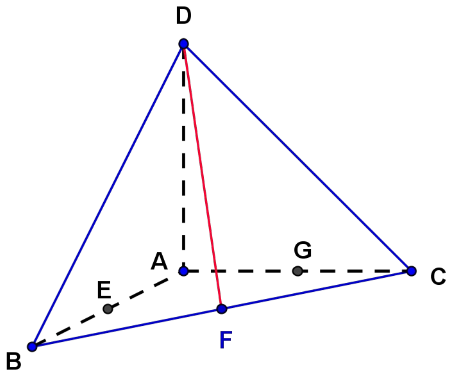
a. Démontrer que $ME^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$.

b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
En déduire que $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

d. Conclure.

Correction :
On réalise une figure (non demandée dans l'énoncé).



1 . (A; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$) est un repère orthonormé de l'espace.
A(0;0;0) B(1;0;0) C(0;1;0) D(0;0;1)

a. D(0;0;1) et F est le milieu de [BC] $F\left(\frac{1+1}{2};\frac{0+1}{2};\frac{0+0}{2}\right)$ $\boxed{F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)}$

b. (DF) est la droite passant par D et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}$

$D(0;0;1)$ $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

On obtient pour représentation paramétrique de (DF) : $\boxed{\begin{cases}x=\frac{1}{2}t+0\\y=\frac{1}{2}t+0\\z=\ -t+1\end{cases}}$ $t\in\mathbb{R}$

c. $\mathscr{P}$ est le plan passant par $A(0;0;0)$ et de vecteur normal : $\overrightarrow{DF}$

$M(x;y;z)\in\mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DF}=0$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

$M(x;y;z)\in\mathscr{P} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-z=0$

$\mathscr{P}$: $x+y-2z=0$

d. Pour déterminer les coordonnées du point H , on résout le système :

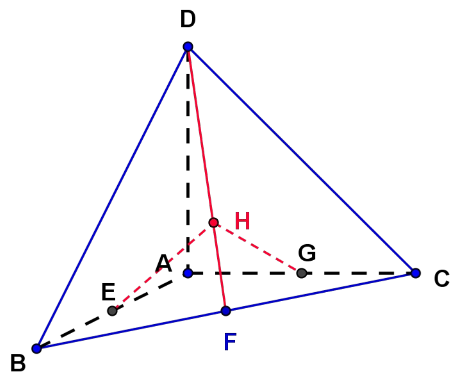
$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t \\ y=\dfrac{1}{2}t \\ z=-t+1 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

On obtient : $\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t-2(-t+1)=0 \Leftrightarrow t+2t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$

$x=\frac{1}{3}$; $y=\frac{1}{3}$; $z=\frac{1}{3}$

$\boxed{H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)}$

c.



E est le milieu de [AB] $\boxed{E\left(\frac{1}{2};0;0\right)}$

G est le milieu de [AC] $G\left(0;\frac{1}{2};0\right)$

$\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ 0-\frac{1}{3}\\ 0-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}0-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ 0-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HE}\boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}}$ $\overrightarrow{HG}\boxed{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{HG}=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{18}-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont **orthogonaux** et l'angle $\widehat{EHG}$ est **un angle droit**.

2 . $\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DF}$ $\quad t\in\mathbb{R}$ et $M\in(DF)$

a. $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EM}=t\,\overrightarrow{DF}$ $\qquad \overrightarrow{EM}=t\,\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}=t\,\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{ED}$

$$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}t+0\\ -t+1\end{pmatrix}$$

Le repère est orthonormé

$$EM^2=\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}t\right)^2+(-t+1)^2=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}t^2+t^2-2t+1$$

$$EM^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$$

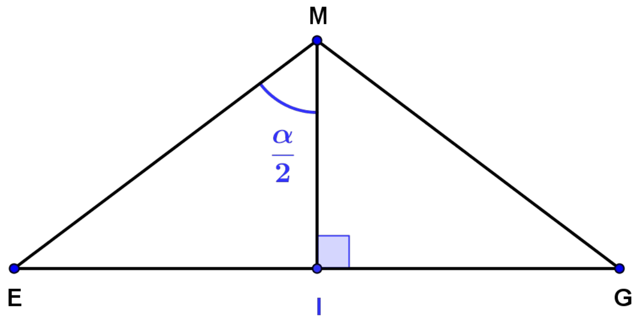
b. On calcule de même GM^2

$\overrightarrow{GM}=t\,\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{GD}$

$$\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\text{ donc }\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}t+0\\ \frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\\ -t+1\end{pmatrix}$$

En effectuant le même calcul on obtient : $GM^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$

Conséquence :
$EM=GM$ et le triangle EGM est **isocèle de sommet principal M**.



Soit I le milieu de [EG]. α est une mesure en radians de l'angle : $\widehat{EMG}$
(MI) est la hauteur du triangle EMG issue du sommet M et (MI) est la bissectrice du triangle EMG issue du sommet M.
Le triangle EMI est rectangle en I et $\frac{\alpha}{2}$ est une mesure en radians de l'angle : $\widehat{EMI}$

On a $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{EI}{ME}$ donc $EI=ME\sin\frac{\alpha}{2}$

I est le milieu de [EG] donc $EI=\frac{1}{2}EG$

$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}0-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-0\\ 0-0\end{pmatrix}$ $\quad$ $\boxed{\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}}$ $\quad$ $EG^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=\frac{1}{2}$ et $EG=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$EI=\frac{1}{2}EG=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Conclusion :

$$\boxed{ME\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

c. $\alpha\in[0;\pi]$ $\quad$ $\frac{\alpha}{2}\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

sin est une fonction strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$\frac{\alpha}{2}$ est **maximal** si et seulement si $\sin\frac{\alpha}{2}$ est **maximal**.

$ME=\frac{1}{2\sqrt{2}\times\sin\frac{\alpha}{2}}$

$\sin\frac{\alpha}{2}$ est **maximal** si et seulement si $2\sqrt{2}\times\sin\frac{\alpha}{2}$ est maximal donc si et seulement si **son inverse est minimal**.

Conclusion :

$\frac{\alpha}{2}$ est **maximal** (c'est à dire α est maximal) si et seulement si la longueur ME est **minimale** (donc ME^2 est minimal)

d. Conclure

- Remarque :

E est fixé et $M\in(DF)$, la longueur ME est minimale si et seulement si M est le pied de la hauteur du triangle EDF issue de E.

(On a précisé la position du point M mais on ne peut pas préciser la valeur de α).

- Par le calcul

$ME^2=f(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$

f est une fonction du second degré qui admet un minimum.

$f'(t)=3t-\frac{5}{2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow 3t-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{6}$

On donne les variations de f dans un tableau

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)		↘	$\frac{5}{24}$	↗	

$$f\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{25}{36}-\frac{5}{2}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{4}=\frac{25}{24}-\frac{25}{12}+\frac{5}{4}=\frac{25-50+30}{24}=\frac{5}{24}$$

La valeur **minimale de ME** est égale à $\boxed{\sqrt{\frac{5}{24}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}}$

La valeur **maximale** de $\sin\frac{\alpha}{2}$ est égale $\frac{1}{2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}}=\boxed{\sqrt{\frac{3}{5}}}$

En utilisant la calculatrice on obtient :
$\frac{\alpha}{2}\simeq 0{,}886\,rd$ (50°,77) et $\alpha\simeq 1{,}772\,rd$ α est égal à **101°,5**

On peut aussi calculer les coordonnées du point M pour $t=\frac{5}{6}$, on obtient $M\left(\frac{5}{12};\frac{5}{12};\frac{1}{6}\right)$ et on vérifie que M est le milieu de [FH].

on donne la dernière figure :