Exercice 4 — Candidats ayant suivi la spécialité — 5 points

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.

Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.
En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0=200$ et celui du bassin B est $b_0=100$.

1 . Justifier que $a_1=400$ et $b_1=300$ puis calculer a_2 et b_2.

2 . On désigne par A et B les matrices telles que $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$.

a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=AX_n+B$.

b. Déterminer les réels x et y tel que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+B$.

c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n=\begin{pmatrix}a_n+400\\b_n+300\end{pmatrix}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1}=AY_n$.

3 . Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n=Y_{2n}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1}=A^2Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1}=2Z_n$

b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n, $Y_{2n}=2^nY_n$.
En déduire que $Y_{2n+1}=2^nY_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n :
$a_{2n}=600\times 2^n-400$ et $a_{2n+1}=800\times 2^n-400$.

4 . Le bassin A a une capacité limitée à 10000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant.

```
Variables :        a, p et n sont des entiers naturels
Initialisation :   Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :       Si p est pair
                       Affecter à n la valeur p/2
```


Affecter à a la valeur $600\times 2^n - 400$

Sinon

Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$

Affecter à a la valeur $800\times 2^n - 400$

Fin de Si

Sortie : Afficher a

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

Correction :

1 . $a_0 = 200$ et $b_0 = 100$.

Le pisciculteur vend 100 poissons du bassin B et achète $2 \times 100 = 200$ poissons pour le bassin A. De plus il achète 200 poissons pour le bassin A donc :

$\boxed{a_1 = 2 \times 100 + 200 = 400 = 2b_0 + 200}$

Les 200 poissons du bassin A sont transférés dans le bassin B, puis le pisciculteur achète 100 poissons pour le bassin B donc :

$\boxed{b_1 = 200 + 100 = a_0 + 100 = 300}$

De même $a_2 = 2 \times b_1 + 200$ et $b_2 = a_1 + 100$

$\boxed{a_2 = 2 \times 300 + 200 = 800}$ et $\boxed{b_2 = 400 + 100 = 500}$

2 .a. En reprenant le raisonnement précédent, on peut affirmer que :
pour tout entier naturel n on a

$a_{n+1} = 2 \times b_n + 200$ et $b_{n+1} = a_n + 100$

Or $AX_n + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times a_n + 2 \times b_n + 200 \\ 1 \times a_n + 0 \times b_n + 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

donc $\boxed{X_{n+1} = AX_n + B}$

b. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 200 \\ y = x + 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 200 \\ -x + y = 100 \end{cases}$

on obtient $-y = 300$ donc $y = -300$ et $x = -400$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400 \\ -300 \end{pmatrix}$

c. Pour tout entier naturel n

$Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + B - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Or $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ donc

$Y_{n+1} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + B - [\, A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B]$

$$Y_{n+1} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n - x \\ b_n - y \end{pmatrix} = AY_n$$

Conséquence :

$$\boxed{Y_{n+1} = AY_n}$$

3 . pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$

a. $Z_{n+1} = Y_{2(n+1)} = Y_{2n+2}$

On a $AY_{2n} = Y_{2n+1}$ et $A^2 Y_{2n} = AY_{2n+1} = Y_{2n+2} = Y_{2(n+1)}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et $Z_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Z_n$

$$Z_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y_{2n} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a_{2n} + 400) \\ 2(b_{2n} + 300) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = 2\,Y_{2n}$$

on obtient $Z_{n+1} = 2\,Z_n$

b. On admet que pour tout entier naturel n : $Y_{2n} = 2^n Y_0$

$Y_{2n+1} = AY_{2n} = A[2^n Y_0] = 2^n[AY_0] = 2^n Y_1$

On a $Y_0 = \begin{pmatrix} a_0 + 400 \\ b_0 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$

$$Y_{2n} = \begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = 2^n\begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600\times 2^n \\ 400\times 2^n \end{pmatrix}$$

donc a_{2n} +400= 600×2^n soit

$$\boxed{a_{2n} = 600\times 2^n - 400}$$

de même $b_{2n} = 400\times 2^n - 300$

on a $a_{2n+1} = 2\times b_{2n} + 200$ et $a_{2n+1} = 2[400\times 2^n - 300] + 200$

on obtient $\boxed{a_{2n+1} = 800\times 2^n - 400}$

4 .a. L'algorithme permet d'obtenir a_p pour le nombre p donné à l'initialisation.

Justifications

Si p est pair alors $p=2n$ avec n entier naturel alors a prend la valeur 600×2^n -400 qui est égale à a_{2n} soit a_p .

Sinon p est impair et $p=2n+1$ avec n entier naturel alors a prend la valeur 800×2^n - 400 qui est égale à a_{2n+1} soit a_p .

b. On effectue une boucle pour calculer les valeurs successives de a_p tant que $a_p > 10000$ et il faut retrancher 1 à p pour obtenir le nombres d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

Variables : a, p et n sont des entiers naturels

Initialisations : ***p=o et q = 200***

Traitement :

TANT QUE a ⩽ 10000 faire
    affecter à p la valeur p+1
    Si p est pair
        Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
        Affecter à n la valeur 600×2^n -400
    Sinon
        Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
        Affecter à a la valeur 800×2^n -400
    Fin si
Fin TANT QUE
    Affecter à p la valeur p-1

Sortie : Afficher p