## Exercice 1 — 5 points

Dans un repère orthonormé de l'espace,on considère les points
A(5;-5 ;2), B(-1;1;0), C(0;1 ;2) et D(6;6;-1).

**1 .** Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

**2 . a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

**b.** Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

**3 .** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par A.

**4 .** Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (BCD).

**5 .** Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

*On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule* $\mathrm{V}=\frac{1}{3}B\times h$ *où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.*

**6 .** On admet que $\mathrm{AB}=\sqrt{76}$ et $\mathrm{AC}=\sqrt{61}$
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ .

**Correction :**

**1 .** $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}7\\5\\-1\end{pmatrix}$

Par un calcul mental rapide, on vérifie que le triangle BCD **n'est pas isocèle** ($BC^2=5$ ; $CD^2=70$ et $BD^2=75$)
On peut démontrer que **le triangle BCD est rectangle en C** en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore ou en calculant le produit scalaire :
$\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{CD} = 1\times 6+0\times 5+2\times(-3) =$ **0**

L'aire $\mathscr{A}$ du triangle BCD, exprimé en unités d'aire, est égale à $\frac{1}{2}\times BC\times CD$
Or, BC= $\sqrt{5}$ et CD= $\sqrt{70}$
Donc, $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{70} = \frac{1}{2}\times\sqrt{350}=\frac{5}{2}\times\sqrt{14}$

Conclusion :
$\mathscr{A} = \boxed{\frac{5}{2}\times\sqrt{14}}$

**2 . a.** $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$
$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{BC} = -2\times 1+3\times 0+1\times 2=0$
$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{CD} = -2\times 6+3\times 5+1\times(-3)=0$

$\vec{n}$ est donc un **vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires** du plan (BCD)donc $\vec{n}$ est un **vecteur normal** non nul au plan (BCD).

**b.** M($x$;$y$;$z$) appartient au plan (BCD)si et seulement si $\overrightarrow{BM}\,.\,\vec{n}=0$
$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-0\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BM}\,.\,\vec{n}=0 \Leftrightarrow -2(x+1)+3(y-1)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow -2x-2+3y-3+z=0 \Leftrightarrow -2x+3y+z-5=0$
(BCD) : **$-2x+3y+z-5=0$**

**3 .** $\mathscr{D}$ est la droite orthogonale au plan (BCD) passant par A donc la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par A.
On obtient pour représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ :
$\begin{cases}x=-2\times t+5\\ y=3\times t-5\\ z=1\times t+2\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ soit $\boxed{\begin{cases}x=-2t+5\\ y=3t-5\\ z=t+2\end{cases}}$ $t\in\mathbb{R}$

 

**4 .** Pour déterminer les coordonnées du point H, on résout le système :

$$\begin{cases} x=-2t+5 \\ \quad =3t-5 \\ z= t+2 \\ -2x+3y+z-5= 0 \end{cases}$$

On obtient :

$-2(-2t+5)+3(3t-5)+(t+2)-5=0 \Leftrightarrow 4t-10+9t-15+t+2-5=0 \Leftrightarrow 14t-28=0$

Soit $\boxed{t=\frac{28}{14}=2}$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$ **H(1;1;4)**

**5 .** $\mathscr{V}$ est le volume du tétraèdre ABCD exprimé en unités de volume $\mathscr{V} = \frac{1}{3}B\times h$

On a $\mathscr{D}$ = (AH) droite orthogonale au plan (BCD) .

On peut choisir B = $\mathscr{A}$ = $\frac{5}{2}\sqrt{14}$ et $h$ = AH

A(5;-5;2) H(1;1;4) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$AH^2 = 4^2+6^2+2^2=16+36+4=56$

AH= $\sqrt{56} = 2\times\sqrt{14}$

$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\times\frac{5}{2}\times\sqrt{14}\times2\times\sqrt{14}=\frac{5\times14}{3}=\frac{70}{3}$

$\mathscr{V} = \boxed{\frac{70}{3}}$

**6 .** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-6)\times(-5)+6\times6+(-2)\times0=66$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 66 = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

Or, AB= $\sqrt{76}$ et AC= $\sqrt{61}$

Donc, $\cos\widehat{BAC} = \frac{66}{\sqrt{76}\times\sqrt{61}}\approx$ **0,969**

Et la calculatrice donne, $\widehat{BAC}\approx$ **14,2°**.