

**Exercice 2****Candidats ayant suivi la spécialité****5 points**

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année. Par exemple une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

**Partie A**

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

« prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1<sup>er</sup> août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1<sup>er</sup> août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

2. a. Pour un spectateur donné, on note  $j$  le numéro de son jour de naissance,  $m$  le numéro de son mois de naissance et  $z$  le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).

Exprimer  $z$  en fonction de  $j$  et de  $m$  et démontrer que  $z$  et  $m$  sont congrus modulo 12.

b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

**Partie B**

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est  $j$  et le numéro du mois de naissance est  $m$ , le magicien demande de calculer le nombre  $z$  défini par  $z=12j+31m$ .

Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. Première méthode.

On considère l'algorithme suivant :

<b>Variation :</b>	$j$ et $m$ sont des entiers naturels
<b>Traitement :</b>	Pour $m$ allant de 1 à 12 faire : Pour $j$ allant de 1 à 31 faire : $z$ prend la valeur $12j+31m$ Afficher $z$ Fin Pour Fin Pour

Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de  $j$  et de  $m$  telles que  $12j+31m = 503$ .

2 . Deuxième méthode.

- a. Démontrer que  $7m$  et  $z$  ont le même reste dans la division euclidienne par 12.
- b. Pour  $m$  variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12.
- c. En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme (B).

3 . Troisième méthode.

- a. Démontrer que le couple  $(-2;17)$  est solution de l'équation  $12x+31y=503$  .
- b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs  $(x;y)$  est solution de l'équation  $12x+31y=503$  , alors  $12(x+2)=31(17-y)$  .
- c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs  $(x;y)$  , solutions de l'équation  $12x+31y=503$  .
- d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs  $(x;y)$  tel que  $1 \leq y \leq 12$ . En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

**Correction :****Partie A**

1. Pour une personne née le 1<sup>er</sup> août,

Le numéro du jour est : **1**

Le numéro du mois est : **8**

Le Programme (A) donne :

$$12 \times 1 + 37 \times 8 = 12 + 296 = \mathbf{308}$$

2. a.  $j$  est le numéro du jour du spectateur.

$m$  est le numéro du mois du spectateur.

$z$  est le résultat obtenu en utilisant le programme (A).

$$z = 12j + 37m$$

$$12 \equiv 0(12)$$

$$37 = 3 \times 12 + 1 \text{ donc } 37 \equiv 1(12)$$

Conséquence :

$$z \equiv 0 \times j + 1 \times m(12)$$

$$z \equiv m(12)$$

b. Pour un spectateur,  $z=474$

$$474 = 39 \times 12 + 6$$

donc,  $474 \equiv 6(12)$

et,  $m \equiv 474(12)$

On obtient  $m \equiv 6(12)$

Remarque :  $1 \leq m \leq 12$

Donc,  $m = \mathbf{6}$

On a :

$$474 = 12j + 37 \times 6$$

$$12j = 474 - 37 \times 6 = 252$$

$$j = \frac{252}{12}$$

$$j = \mathbf{21}$$

Le spectateur est né **le 21 juin**.

**Partie B****1. Première méthode**

Modification de l'algorithme proposé :

**Variables :**  $j$  et  $m$  sont des entiers naturels

**Traitement :**

Pour  $m$  allant de 1 à 12 faire :

Pour  $j$  allant de 1 à 31 faire :

$z$  prend la valeur  $12j+31m$

Si  $z=503$

Afficher  $j$  et  $m$

Fin Si

Fin Pour

Fin Pour

## 2. Deuxième méthode

a.  $12 \equiv 0(12)$   
 $31 = 2 \times 12 + 7$   
 donc  $31 \equiv 7(12)$   
 et  $z = 12j + 31m$  on obtient  $z \equiv 0 \times j + 7 \times m(12)$   
 soit  $z \equiv 7m(12)$

b. On donne le résultat sous forme de tableau

<b>m</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>7m</b>	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0

c.  $503 = 12 \times 41 + 11$   
 Pour le programme (B) le numéro du mois de naissance du spectateur est **5**  
 $503 = 12j + 5 \times 31$   
 $12j = 503 - 5 \times 31 = 348$   
 $j = \frac{348}{12} = \mathbf{29}$

Le numéro du jour de naissance du spectateur est : **29**  
 Le spectateur est né **le 29 mai**.

## 3. Troisième méthode

On considère l'équation :  $12x + 31y = 503$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs

a.  $12 \times (-2) + 17 \times 31 = -24 + 527 = 503$   
 donc le couple  $(-2; 17)$  est **solution de l'équation**  $12x + 31y = 503$

b.  $12x + 31y = 503$  or  $12 \times (-2) + 31 \times 17 = 503$   
 donc  $12x + 31y = 12 \times (-2) + 31 \times 17$   
 et  $12x - 12 \times (-2) = 31 \times 17 - 31y$   
 Soit,  $12(x+2) = 31(17-y)$

c.

On utilise **le théorème de GAUSS**.

12 et 31 sont premiers entre eux (31 est un nombre premier qui ne divise pas 12)

12 divise le produit  $31(17-y)$ donc 12 divise  $(17-y)$ Il existe donc un entier relatif  $k$  tel que :  $17-y=12k$ 

$$12(x+2)=31 \times 12k$$

Soit,  $x=31k-2$

VérificationPour tout entier relatif  $k$ 

$$12(31k-2)+31(17-12k)=-2 \times 12+31 \times 17 = \mathbf{503}$$

Conclusion :L'ensemble des solutions de l'équation  $12x+31y=503$  est l'ensemble des couples d'entiers relatifs :

$$\mathbf{(31k-2; -12k+17)}$$
 pour  $k \in \mathbb{Z}$

d.  $1 \leq y \leq 12$  donc  $1 \leq -12k+17 \leq 12$ 

Soit  $-1 \geq 12k-17 \geq -12$  et  $16 \geq 12k \geq 5$

On obtient  $\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

L'unique entier relatif compris entre  $\frac{5}{12}$  et  $\frac{4}{3}$  est **1**Pour  $k=1$ ,  $y=-12 \times 1+17=5$  et on a alors  $x=31 \times 1-2=29$ .Le numéro du jour de naissance du spectateur est : **29**Le numéro du mois de naissance du spectateur est : **5**Le spectateur est né **le 29 mai**.