Exercice 4 — 5 points

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{x}$ et $g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$
On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1 . Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elle ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2 . Étude de la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ .

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2$.

a. Déterminer la limite de la fonction en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel non nul x, $h(x)=x\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\dfrac{2}{x}\right)$

En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$
Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$

e. En déduire que, pour tout réel non nul, $2e^{\frac{x}{2}}-1>x+1$

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ ?

3 . Étude de la position relative des courbes C_f et C_g

a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes C_f et C_g .

4 . Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes C_f et C_g et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

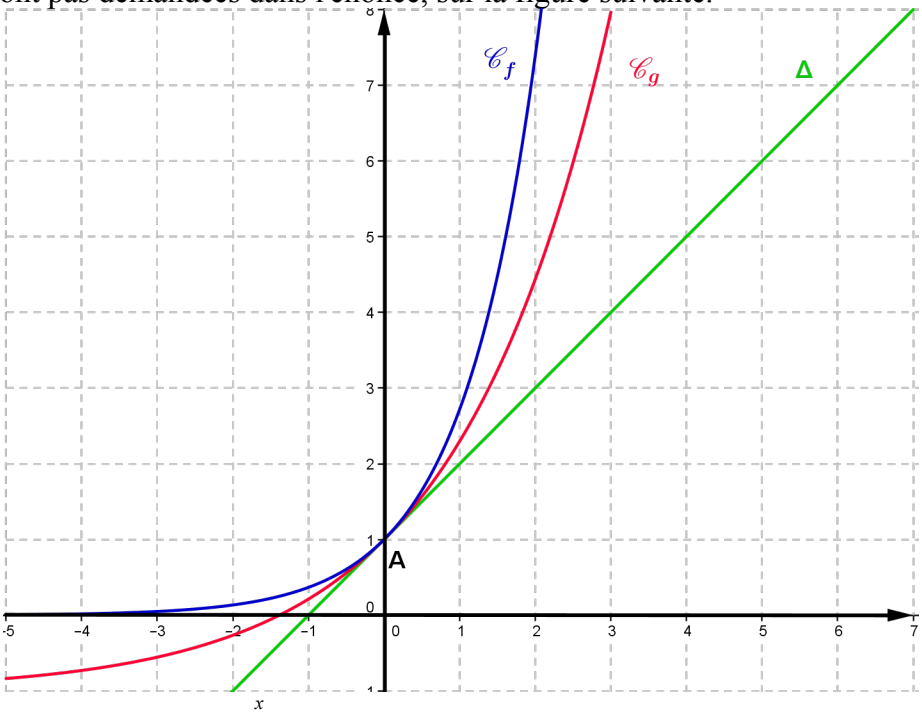
Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Correction :

1 . Pour démontrer que C_f et C_g ont un point commun d'abscisse 0, il suffit de vérifier que : $f(0)=g(0)$.
$f(0)=e^0=1$ et $g(0)=2e^0-1=1$
A(0;) est le point commun d'abscisse 0 des courbes C_f et C_g .
Remarque :
Nous n'avons pas démontré que C_f et C_g avaient un unique point commun.

Pour démontrer que C_f et C_g ont la même tangente en A, il suffit de vérifier que : $f'(0)=g'(0)$.
$f(x)=e^x$ donc $f'(x)=e^x$ et $f'(0)=e^0=1$
$g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$ donc $g'(x)=2\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)=e^{\frac{x}{2}}$ et $g'(0)=e^0=1$
C_f et C_g ont la même tangente au point A : la droite passant par A et de coefficient directeur
$\boxed{f'(0)=g'(0)=1.}$
Une équation de Δ est : $y-1=1\times(x-0)$
Δ : $y=x+1$

2 . Étude de la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ .
En utilisant la calculatrice, on peut obtenir sur l'écran : C_f , C_g et Δ . Ici on donne les représentations graphiques, qui ne sont pas demandées dans l'énoncé, sur la figure suivante.



h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2$.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x}{2}}=0$

D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-2)=+\infty$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Conséquence
$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$

b. Pour tout réel non nul x :

$$h(x)=x\left[\frac{2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x}-\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right]$$

$$h(x)=x\left[\frac{2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\frac{2}{x}\right]$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^X}{X}=+\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}=+\infty$

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1-\frac{2}{x}\right)=$-1

Conséquence
$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

c. h est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$h'(x)=2\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)-1=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1$$

$h'(x)=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=\mathrm{e}^0=1\Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}>e^0=1\Leftrightarrow x>0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

On donne le signe de $h'(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

d. Tableau de variations de la fonction h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$h(0)=2\times e^0-0-2=0$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

e. h admet un minimum 0 en 0 et $h(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Conséquence
Pour tout nombre réel non nul, on a :
$\boxed{h(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{\frac{x}{2}}-1>x+1}$

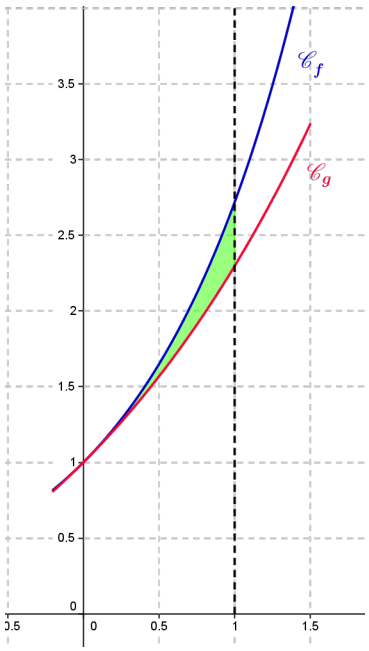
f. On a C_g : $y=g(x)$ et Δ : $y=x+1$
Pour tout réel non nul x : $g(x)>x+1$
C_g est **au dessus** de Δ .

3 . Étude de la position relative des courbes C_f et C_g

a. Pour tout nombre réel x
$\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2-2e^{\frac{x}{2}}+1=e^{2\times\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+1=e^x-2e^{\frac{x}{2}}+1$

b. $f(x)=e^x$ **et** $g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$
Donc, $f(x)-g(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$
Or, pour nombre non nul x :
$\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2>0$
Donc, $f(x)>g(x)$
Conséquence
C_f est **au dessus** de C_g .

4 . En utilisant la calculatrice, et en changeant les unités, on peut obtenir sur l'écran, le domaine plan considéré. Ici on donne la représentation graphique (non demandée dans l'énoncé) sur la figure suivante. Le domaine considéré est en vert sur le dessin.



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Pour tout nombre réel $x\in[0;1]$, on a $f(x)>g(x)$, donc l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre les courbes C_f et C_g et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$ est :

$$\mathcal{A}=\int_0^1 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$$

Rappel

Une primitive de la fonction l définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x)=\mathrm{e}^{ax}$ (a est un nombre réel non nul fixé est la fonction L définie sur $\mathbb{R}$ par $L(x)=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$.

Ici, $a=\frac{1}{2}$, $l(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ et $L(x)=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

Donc,la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{H(x)=4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}x^2-2x}$ est **une primitive** de h sur $\mathbb{R}$

$$\mathcal{A}=H(1)-H(0)=4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-2-4$$

$$\mathcal{A}=4\sqrt{e}-\frac{13}{2}$$

$$\mathcal{A}\simeq \mathbf{0,1}$$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés