Exercice 1 5 points

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 ml,et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 ml. On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 ml, de crème.

1 . Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en ml, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu=50$ et d'écart type $\sigma=1,2$.
Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.

2 . La proportion de pots de crème, non conforme est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu=50$.
On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.
On note σ' le nouvel écart type, et Z la variable aléatoire égale à $\frac{X-50}{\sigma'}$.

a . Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.

b . Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $P(Z\leqslant u)=0,06$.

c . En déduire la valeur attendue de σ' .

3 . Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème. On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d''atteindre l'objectif fixé. Et donc la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

a . On admet que Y suit une loi binomiale. En trouver les paramètres.

b . Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de la crème. Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites. Estimer par un intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Correction :

PARTIE A

1 . Un pot de crème est non conforme pour X<49
X suit la loi normale d'espérance $\mu=50$ et d'écart type $\sigma=1,2$.
On détermine P(X < 49) en utilisant la calculatrice : **P(X<49)=0,202**

2 . X suit la loi normale d'espérance $\mu=50$ et d'écart type σ' .
On veut déterminer σ' pour obtenir P(X<49)=0,06.

a . $Z=\frac{X-50}{\sigma'}=\frac{X-\mu}{\sigma'}$
Donc Z **suit la loi normale centrée et réduite**.

b . Pour déterminer u tel que : $P(Z\leqslant u)=0,06$ on utilise la calculatrice, on obtient : ***u*=-1,555**

c . $Z\leqslant u\Leftrightarrow\frac{X-50}{\sigma'}\leq-1,555\Leftrightarrow X-50\leq-1,555\sigma'\Leftrightarrow X\leqslant50-1,555\sigma'$
Donc $P(X\leqslant50-1,555\,\sigma')=0,06$
Or, on a $P(X\leqslant49)=0,06$
On obtient :
$49=50-1,555\,\sigma' \Leftrightarrow 1=1,555\,\sigma' \Leftrightarrow \sigma'=\frac{1}{1,555}$
$\sigma'\approx$ **0,643**

3 . a . Y suit la loi binomiale de paramètre n=50 et p=0,06

b . $P(Y=2)=\boxed{\binom{50}{2}0,06^2\times0,94^{48}}\simeq$ **0,226**
$P(Y\leqslant2)\simeq$ **0,416**

PARTIE B :

La proportion de personnes satisfaites dans l'échantillon de 140 personnes est : $\boxed{p=\frac{99}{140}\simeq0,707}$
$n=140\geqslant30 \qquad np=140\times0,707\geqslant5 \qquad n(1-p)=140\times0,293\geqslant5$
L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est : $\left[\frac{99}{140}-\frac{1}{\sqrt{140}};\frac{99}{140}+\frac{1}{\sqrt{140}}\right]$

On obtient **[0,642;0,792]**