Exercice 2 6 points

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=5\mathrm{e}^{-x}-3\mathrm{e}^{-2x}+x-3$
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=x-3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-(x-3)$.

1 . Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $g(x)>0$.

2 . La courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction *g*

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1 . Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.

2 . On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
Pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, calculer $g'(x)$.

3 . Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0;+\infty[$ que l'on déterminera.
En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\mathscr{A}(x)=\int_0^2 [f(t)-(t-3)]dt$

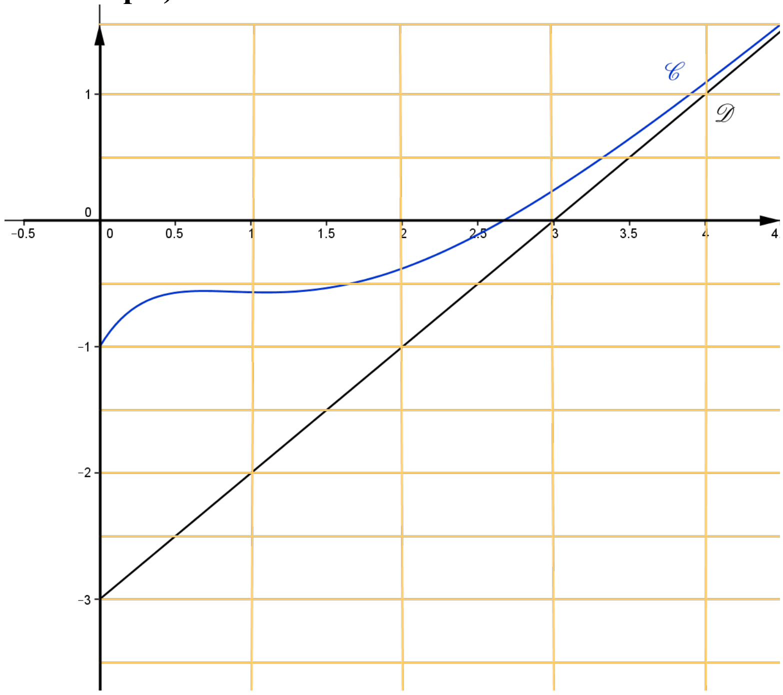
1 . Hachurer sur le graphique donné en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** le domaine l'aire est donnée par $\mathscr{A}(2)$.

2 . Justifier que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3 . Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathscr{A}(x)$.

4 . Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathscr{A}(x)=2$?

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)



<u>Correction :</u>

PARTIE A : Positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$

$x\in[0;+\infty[$, $g(x)=f(x)-(x-3)=5\,\mathrm{e}^{-x}-3\,\mathrm{e}^{-2x}$

1 . $5\,\mathrm{e}^{-x}-3\,\mathrm{e}^{-2x}=\mathrm{e}^{-2x}(5\,\mathrm{e}^{x}-3)$

Pour tout réel x positif ou nul, on a :
$\mathrm{e}^{-2x}>0$

$\mathrm{e}^{x}\geqslant\mathrm{e}^{0}=1$ (la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).
Donc $5\,\mathrm{e}^{x}\geqslant5$ et $5\,\mathrm{e}^{x}-3\geqslant2>0$
Conséquence :
Pour $x\in[0;+\infty[$, $\boxed{g(x)=\mathrm{e}^{-2x}(5\mathrm{e}^{x}-3)>0}$

2 . Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{D}$ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y=f(x)\\ y=x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=x-3\\ y=x-3\end{cases}$$

Or, $f(x)=x-3\Leftrightarrow g(x)=0$
Nous avons vu que pour tout $x\in[0;+\infty[$, $g(x)>0$.
Donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution.
<u>Conclusion</u>
Il **<u>n'existe pas de point commun</u>** entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

PARTIE B : Étude de la fonction *g*

1. $x\in[0;+\infty[$ M est un point de $\mathscr{C}$ donc $\mathrm{M}(x;f(x))$
N est un point de $\mathscr{D}$ donc $\mathrm{N}(x;x-3)$

$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\begin{pmatrix}x-x\\(x-3)-f(x)\end{pmatrix}$ soit $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{MN}}\begin{pmatrix}0\\-g(x)\end{pmatrix}}$

<u>conséquence :</u>
MN=|-$g(x)$|=$g(x)$ car pour tout x réel positif ou nul on a : $g(x)>0$.

2 . Si u est dérivable sur un intervalle I alors sur cet intervalle $(\mathrm{e}^{u})'=u'\times\mathrm{e}^{u}$
$x\in[0;+\infty[$, $g(x)=5\,\mathrm{e}^{-x}-3\,\mathrm{e}^{-2x}$
Donc g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\boxed{g'(x)=5(-\mathrm{e}^{-x})-3(-2\,\mathrm{e}^{-2x})=-5\,\mathrm{e}^{-x}+6\,\mathrm{e}^{-2x}}$

3 . $x\in[0;+\infty[$, $g'(x)=\mathrm{e}^{-2x}(-5\,\mathrm{e}^{x}+6)$
Pour tout réel x positif ou nul on a : $\mathrm{e}^{-2x}\geqslant0$ donc

$$g'(x)\geqslant0\Leftrightarrow-5\,\mathrm{e}^{x}+6\geqslant0\Leftrightarrow6\geqslant5\,\mathrm{e}^{x}\Leftrightarrow\frac{6}{5}\geqslant\mathrm{e}^{x}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{6}{5}\right)\geqslant x$$

$$g'(x)<0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{6}{5}\right)<x$$

On donne **<u>les variations de *g* sous la forme d'un tableau</u>** :

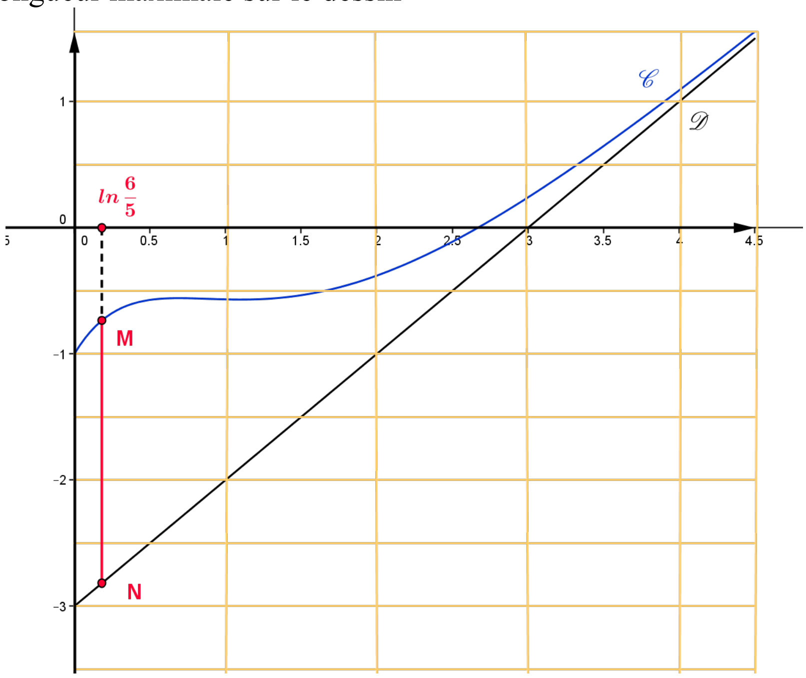
x	0	$\ln\left(\frac{6}{5}\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{25}{12}$	$\searrow$

g admet **un maximum** pour $x=\ln\left(\frac{6}{5}\right)$

$$g\left(\ln\frac{6}{5}\right)=5\,e^{-\ln\frac{6}{5}}-3\,e^{-2\ln\frac{6}{5}}=5\,e^{\ln\frac{5}{6}}-3\,e^{\ln\frac{25}{36}}=5\times\frac{5}{6}-3\times\frac{25}{36}=\frac{25}{6}-\frac{25}{12}=\frac{25}{12}$$

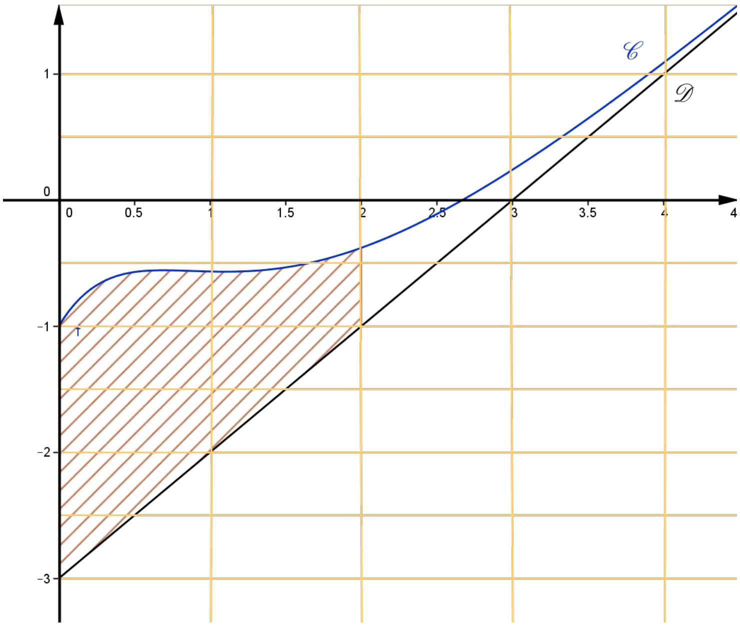
La **valeur maximale de la distance MN** est : $\frac{25}{12}\approx$ **2,08** obtenue pour $x=\ln\left(\frac{6}{5}\right)\approx$ **0,18**

On trace le segment de longueur maximale sur le dessin



PARTIE C : Étude d'une aire

1 . $\mathscr{A}(2)$ est **l'aire** , en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.
On hachure ce domaine dans la figure suivante :



2 . On a $\mathscr{A}(x)=\int_0^x g(t)\,dt$

$\mathscr{A}$ est **la primitive** de g sur $[0;+\infty[$ telle que $\mathscr{A}(0)=0$

Conséquence :

$\mathscr{A}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}'(x)=g(x)$. Or, $g(x)>0$ sur $[0;+\infty[$ donc $\mathscr{A}$ est **strictement croissante** sur $[0;+\infty[$.

3 . $x\in[0;+\infty[$, a est un réel non nul fixé.

Une **primitive** sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x)=e^{ax}$ est une fonction H définie par $\boxed{H(x)=\frac{1}{a}e^{ax}}$

Pour $g(x)=5e^{-x}-3e^{-2x}$

$$G(x)=5\left(\frac{1}{-1}e^{-x}\right)-3\left(\frac{1}{-2}e^{-2x}\right)=-5e^{-x}+\frac{3}{2}e^{-2x}$$

G est **une primitive** de g sur $[0;+\infty[$.

et $\mathscr{A}(x)=\int_0^x g(t)\,dt=G(x)-G(0)$

$$\mathscr{A}(x)=-5e^{-x}+\frac{3}{2}e^{-2x}+5e^0-\frac{3}{2}e^0=\boxed{\frac{7}{2}-5e^{-x}+\frac{3}{2}e^{-2x}}$$

4 . $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$ donc $\mathscr{A}(x)$ admet $\boxed{\frac{7}{2}}$ pour limite en $+\infty$.

$\mathscr{A}$ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, à valeurs dans $\left[0;\frac{7}{2}\right[$.

$0\leqslant 2\leqslant\frac{7}{2}$.

Le **théorème des valeurs intermédiaires** nous permet de conclure que l'équation $\mathscr{A}(x)=2$ admet **une solution unique** $\alpha\in[0;+\infty[$.

<u>Remarque</u>
Dans l'énoncé , on ne demande pas de résoudre l'équation $\mathscr{A}(x)=2$ mais on peut la résoudre.

$\mathscr{A}(x)=2 \Leftrightarrow \frac{7}{2}-5e^{-x}+\frac{3}{2}e^{-2x}=2 \Leftrightarrow 3e^{-2x}-10e^{-x}+7=4 \Leftrightarrow 3(e^{-x})^2-10e^{-x}+3=0$

On peut résoudre cette équation en posant $X=e^{-x}$
On obtient : $3X^2-10X+3=0$
$\Delta=100-36=64=8^2$
$X'=\frac{10+8}{6}=\frac{18}{6}=3$
$X''=\frac{10-8}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
On résout alors :

$e^{-x}=3 \Leftrightarrow -x=\ln 3 \Leftrightarrow x=-\ln 3<0$
$e^{-x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow -x=\ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-\ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\ln 3>0$

On a $x\in[0;+\infty[$ donc l'équation $\mathscr{A}(x)=2$ **<u>admet une seule solution qui est : ln3</u>.**