Exercice 3 — 4 points

On considère un cube ABCDEFGH donné en annexe 2 (à rendre avec la copie)

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$

PARTIE A : Section du cube par le plan (MNP)

1 . Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
Construire le point L.

2 . On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

a . Construire les points T et Q en laissant apparent les traits de construction.

b . Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

3 . En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

PARTIE B

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$.

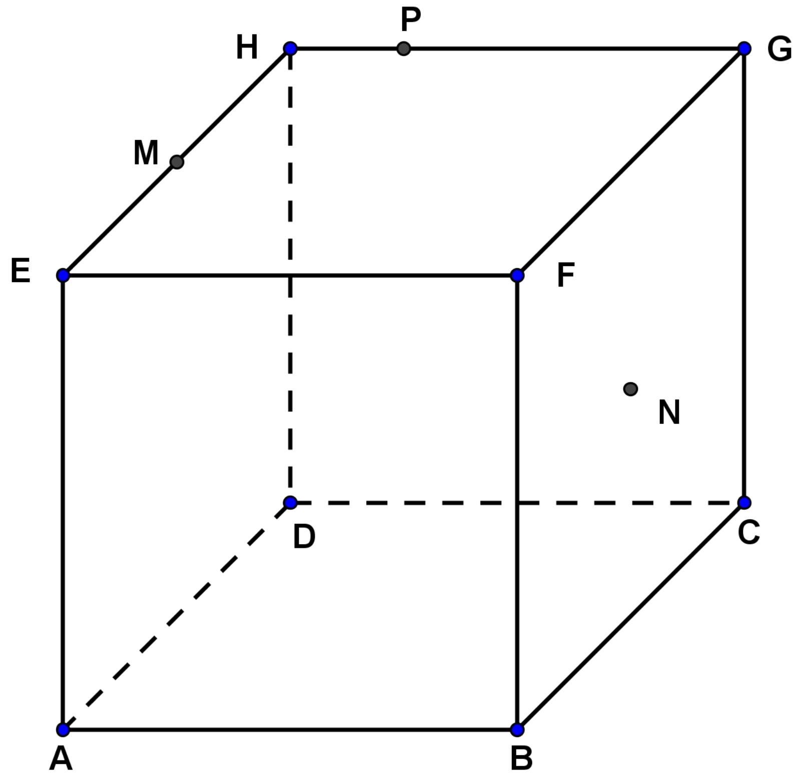
1 . Déterminer les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.

2 . Déterminer les coordonnées du point L.

3 . On admet que le point T a pour coordonnées $(1 ; 1 ; \frac{5}{8})$

Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

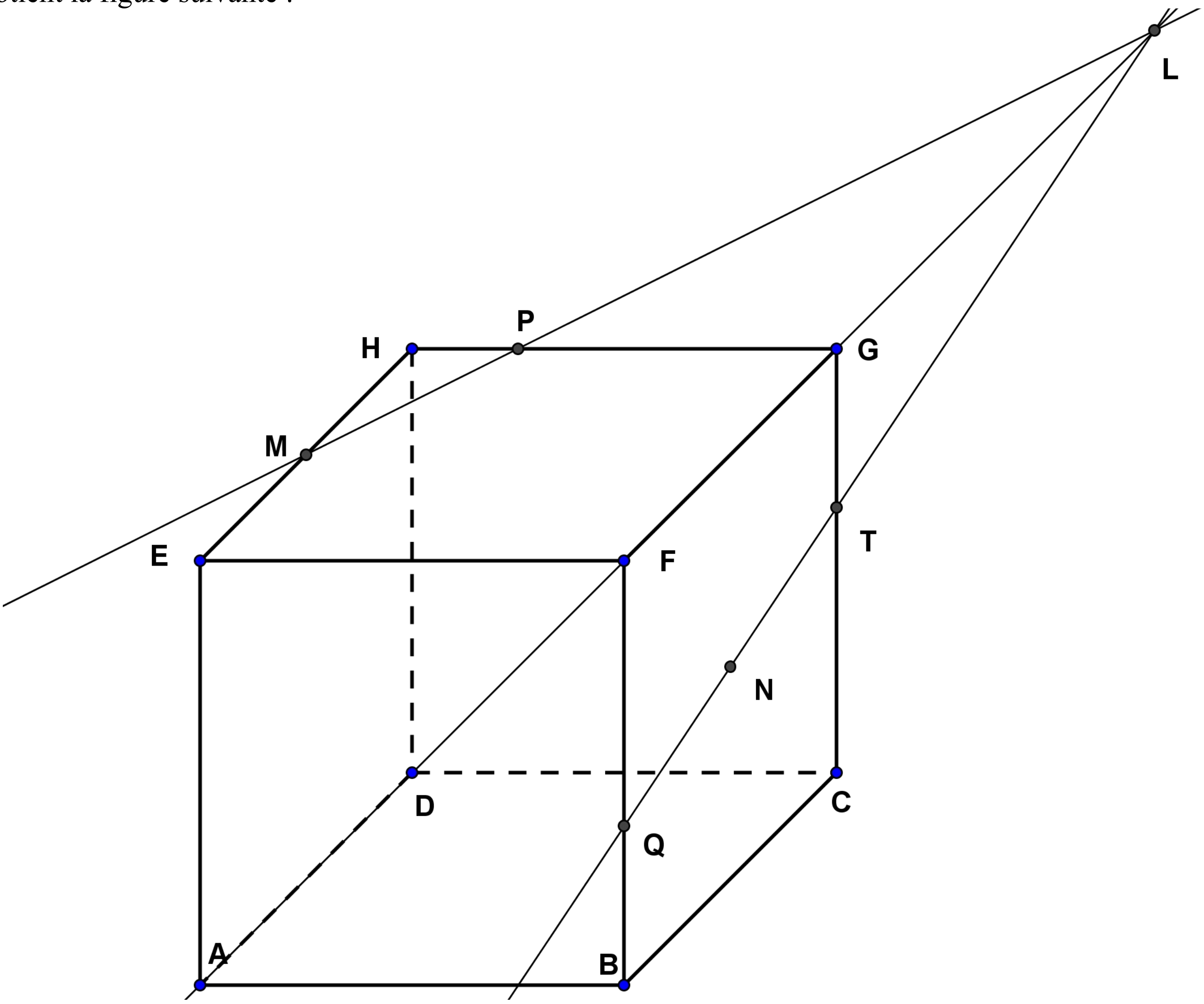


Correction :

PARTIE A : Section du cube par le plan (MNP)

1 . (MP) et (FG) sont **deux droites coplanaires**. Elles sont contenues dans le plan (FGH). Les droites (MP) et (FG) **ne sont pas parallèles**, elles **sont donc sécantes**.
On obtient le point d'intersection L en traçant sur le dessin (de l'annexe 2) les droites (MP) et (FG).

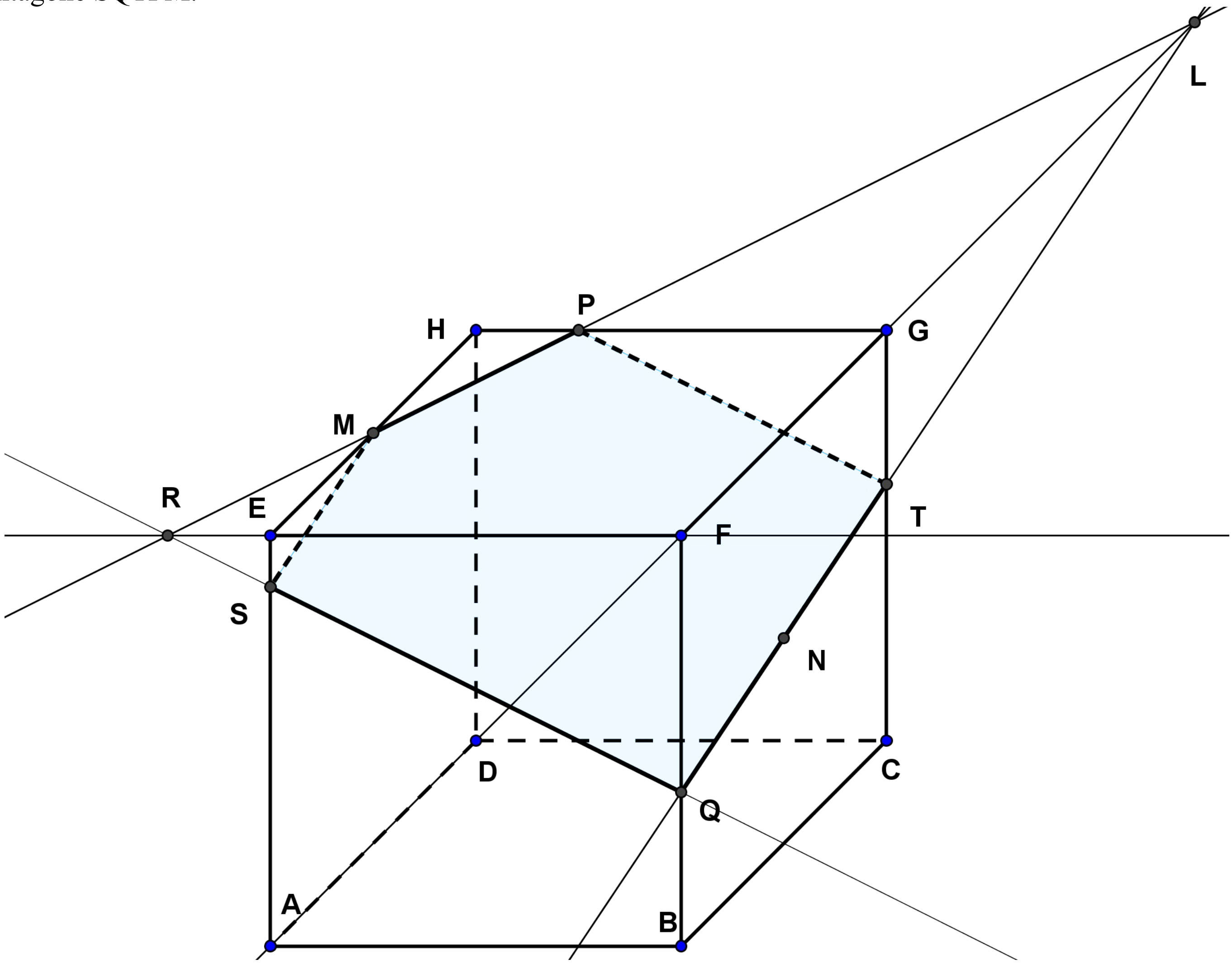
2 . a . Les droites (LN) et (CG) sont coplanaires.Elles sont contenues dans le plan (FGC). On note T le point d'intersection des droites (LN) et (CG).
Les droites (LN) et (BF) sont coplanaires. Elles sont contenues dans le plan (FGC). On note Q le point d'intersection des droites (LN) et (BF).
On trace la droite (LN) sur le dessin pour obtenir les points T et Q.
On obtient la figure suivante :



b . Le plan (MNP) est égal au plan (LMQ).
Les droites (LM) et (EF) sont coplanaires.Elles sont contenues dans le plan (FGH).
Les droites (LM) et (EF) sont sécantes en R.
Les droites (RQ) et (EA) sont coplanaires.Elles sont contenues dans le plan (ABF).
Les droites (RQ) et (EA) sont sécantes en S.
Les points S et Q sont deux points distincts appartenant aux deux plans (ABF) et (MNP).

Conclusion :
La droite d'intersection des plans (MNP) et (ABF) est la droite (QS).

3 . On obtient pour section du cube ABCDEFGH par le plan (MNP), la partie de plan délimitée par le pentagone SQTPM.



PARTIE B

$(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
A(0;0;0) B(1;0;0) D(0;1;0) E(0;0;1) C(1;1;0) F(1;0;1) G(1;1;1) H(0;1;1)

1 . M est le milieu de [EH]

$$M\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+1}{2};\frac{1+1}{2}\right) \qquad \boxed{M\left(0;\frac{1}{2};1\right)}$$

N est le milieu de [FC]

$$N\left(\frac{1+1}{2};\frac{1+0}{2};\frac{0+1}{2}\right) \qquad \boxed{N\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

$$P(x;y;z) \qquad \overrightarrow{HP}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{HG} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4}\times 1 \\ y-1=\frac{1}{4}\times 0 \\ z-1=\frac{1}{4}\times 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \qquad \boxed{P\left(\frac{1}{4};1;1\right)}$$

2 . L est le point d'intersection de (MP) et (FG).
On détermine une représentation paramétrique des droites (MP) et (FG)

$$\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-0 \\ 1-\frac{1}{2} \\ 1-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (MP)\begin{cases} x=\frac{1}{4}t+0 \\ y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \\ z=0\times t+1 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AD}\right) \qquad (FG)\begin{cases} x=0\times t'+1 \\ y=1\times t'+0 \\ z=0\times t'+1 \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

On obtient $\begin{cases} \frac{1}{4}t=1 \\ \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}=t' \\ 0\times t+1=0\times t'+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t'=\frac{5}{2} \end{cases}$

$x=1$; $y=\frac{5}{2}$; $z=1$ $\qquad \boxed{L\left(1;\frac{5}{2};1\right)}$

T est le point d'intersection de (LN) et (CG).

Remarque :
Dans l'énoncé on donne les coordonnées de T et on ne demande pas de les calculer.

$$\overrightarrow{LN}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (LN)\begin{cases} x=0\times k+1 \\ y=-2\times k+1 \\ z=-\frac{1}{2}\times k+\frac{1}{2} \end{cases} \quad k\in\mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (CG)\begin{cases} x=0\times k'+1 \\ y=0\times k'+1 \\ z=1\times k'+0 \end{cases} \quad k'\in\mathbb{R}$$

On obtient $\begin{cases} 0\times k+1=0\times k'+1 \\ -2\times k+\frac{1}{2}=0\times k'+1 \\ -\frac{1}{2}\times k+\frac{1}{2}=k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-\frac{1}{4} \\ k'=\frac{5}{8} \end{cases}$

$x=1$; $y=1$; $z=\frac{5}{8}$ $\qquad \boxed{T\left(1;1;\frac{5}{8}\right)}$

3 . On suppose que le repère est **orthonormé** c'est à dire que l'unité de longueur est égale à AB.

$T\left(1;1;\frac{5}{8}\right)$ $\quad N\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ $\quad \overrightarrow{TN}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{8}\end{pmatrix}$

$T\left(1;1;\frac{5}{8}\right)$ $\quad P\left(\frac{1}{4};1;1\right)$ $\quad \overrightarrow{TP}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\0\\\frac{3}{8}\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{TN}\ .\ \overrightarrow{TP} = 0\times\left(-\frac{3}{4}\right)+0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\times\frac{3}{8}=-\frac{3}{64}$$

Le produit scalaire des deux vecteurs est **non nul**, les vecteurs $\overrightarrow{TN}$ et $\overrightarrow{TP}$ **ne sont pas orthogonaux** donc le triangle **TPN n'est pas rectangle en T**.