Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité — 5 points

Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du $n^{\text{ième}}$ jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du $n^{\text{ième}}$ jour de fonctionnement.

On a donc $a_0=800$ et $b_0=1400$

1 . Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?

2 . Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+330$.

3 . L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	. :	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	. :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	. :	Tant que $a<1100$ faire : Affecter à a la valeur **. . . .** Affecter à n la valeur **. . . .** Fin tant que
Sortie	. :	Afficher n

4 . Pour tout entier naturel n, on note $u_n=a_n-1320$.

a . Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b . Exprimer u_n en fonction de n.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

5 . On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir,au mètre cube près, le même volume d'eau.

Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Correction :

1 . L'énoncé précise : un volume constant de 2200 m^3 d'eau est **réparti** entre deux bassins A et B donc pour tout entier naturel n, on a :
$a_n+b_n=2200$

2 . Pour tout entier naturel n
a_n est le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A, à la fin du $n^{\text{ième}}$ jour.
b_n est le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin B, à la fin du $n^{\text{ième}}$ jour.
Au début du $(n+1)^{\text{ième}}$ jour :

- 15 % du volume présent dans le bassin B est transféré dans le bassin A.
  C'est à dire, on ajoute $0{,}15\,b_n$ m^3 au bassin A.

- 10 % du volume présent dans le bassin A est transféré dans le bassin B.
  C'est à dire, on retire $0{,}1\,a_n$ m^3 d'eau au bassin A.

Conséquence :
a_{n+1} est le volume d'eau,exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A à la fin du $(n+1)^{\text{ième}}$ jour.
$a_{n+1}=a_n+0{,}15\,b_n-0{,}1\,a_n$
Or, b_n =2200- a_n
$a_{n+1}=a_n+0{,}15(2200-a_n)-0{,}1\,b_n=a_n+330-0{,}15\,a_n-0{,}1\,a_n=0{,}75\,a_n+330$
$\boxed{a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+330}$

3 . On complète l'algorithme pour déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1100.

Variables	. :	n est un entier naturel
		a est un nombre réel
Initialisation	. :	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	. :	Tant que a<1100,faire :
		Affecter à a la valeur : $\boxed{\frac{3}{4}a+330}$
		Affecter à n la valeur : $\boxed{n+1}$
		Fin Tant que
Sortie	. :	Afficher n

4 . Pour tout entier naturel n : $u_n=a_n-1320$

a . $u_{n+1}=a_{n+1}-1320=\frac{3}{4}a_n+330-1320=\frac{3}{4}a_n-990=\frac{3}{4}(u_n+1320)-990=\frac{3}{4}u_n+990-990$

$u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n$
Et $u_0=a_0$ -1320=800-1320=-520

Conclusion :

(u_n) est **la suite géométrique** de **raison** $\boxed{\frac{3}{4}}$ et de **premier terme** $\boxed{-520}$.

b . Pour tout entier naturel n

$$u_n=u_0 q^n=-520\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

et $a_n=1320+u_n$

$$\boxed{a_n=1320-520\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

5 . Les deux bassins A et B ont le même volume d'eau si et seulement si le bassin A a pour volume d'eau : $1100\ m^3$.

$$a_n=1100\Leftrightarrow 1320-520\times\left(\frac{3}{4}\right)^n=1100$$

$$\Leftrightarrow 520\times\left(\frac{3}{4}\right)^n=220\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{220}{520}=\frac{11}{26}$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]=\ln\frac{11}{26}\Leftrightarrow n\ln\frac{3}{4}=\ln\frac{11}{26}\Leftrightarrow n=\frac{\ln\frac{11}{26}}{\ln\frac{3}{4}}\approx 2{,}99$$

n est un entier naturel.

Pour $n=3$:

$$a_3=1320-520\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\simeq 1100{,}63$$

$$b_3=2200-a_n\simeq 2200-1100{,}63=1099{,}37$$

$$a_3-b_3\simeq 1100{,}63-1099{,}37=1{,}26>1$$

Conclusion :

Les deux bassins ne peuvent pas avoir, le même jour, le même volume d'eau au mètre cube près.