Exercice 4 — Candidats ayant suivi la spécialité — 5 points

Un volume constant de 2200 m^3 est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 1100 m^3 d'eau et le bassin B contient 1100 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent au début de journée dans le bassin A est transféré dans le bassin B, pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m^3 du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A à la fin du $n^{\text{ième}}$ jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin B à la fin du $n^{\text{ième}}$ jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1100$ et $b_0 = 1100$.
Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1 . Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n .

2 . On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins. Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul suivante :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100	1100
3	1		
4	2	1187.5	1012.5
5	3	1215.63	984.38
6	4	1236.72	963.28
7	5	1252.54	947.46
8	6	1264.4	935.6
9	7	1273.3	926.7
10	8	1279.98	920.02
11	9	1284.98	915.02
12	10	1288.74	911.26
13	11	1291.55	908.45
14	12	1293.66	906.34
15	13	1295.25	904.75
16	14	1296.44	903.56
17	15	1297.33	902.67
18	16	1298	902
19	17	1298.5	901.5
20	18	1298.87	901.13

3 . Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée $M=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}15\\ 0{,}1 & 0{,}85\end{pmatrix}$ et les matrices colonnes R= $\begin{pmatrix}-5\\ 5\end{pmatrix}$ et $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$

1 . On note $S=\begin{pmatrix}1300\\ 900\end{pmatrix}$

Vérifier que S=MS+R

En déduire que, pour tout entier naturel n, X_n - S=M(X_n -S)

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n :

$X_n - S = M^n(X_0 - S)$ et que $M^n = \begin{pmatrix}0{,}6+0{,}4\times 0{,}75^n & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}75^n\\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}75^n & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}75^n\end{pmatrix}$

2 . Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n=\begin{pmatrix}1300-200\times 0{,}75^n\\ 900+200\times 0{,}75^n\end{pmatrix}$

3 . Valider ou invalider les conjectures effectués à la question 3 de la partie A.

4 . On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie :

1300- a_n <1,5 et b_n -900<1,5

Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.

Correction :

1 . L'énoncé précise :« un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B »
Donc pour tout entier naturel n, on a :
$a_n+b_n=2200$

2 . Pour tout entier naturel n **:**
a_n est le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A, à la fin du $n^{ième}$ jour
b_n est le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin B, à la fin du $n^{ième}$ jour
Au début du $(n+1)^{ième}$ jour

. 15 % du volume présent dans le bassin B est transféré dans le bassin A.
C'est à dire on ajoute $0{,}15\,b_n$ m^3 d'eau au bassin A et on retire $0{,}15\,b_n$ m^3 d'eau au bassin B.

. 10 % du volume présent dans le bassin A est transféré dans le bassin B.
C'est à dire on retire $0{,}1\,a_n$ m^3 d'eau au bassin A on ajoute $0{,}1\,a_n$ m^3 d'eau au bassin B.

. On transfère également 5 m^3 d'eau du bassin A au bassin B.
C'est à dire on retire 5 m^3 d'eau au bassin A et on ajoute 5 m^3 d'eau au bassin B.

Conséquence :
a_{n+1} est le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A à la fin du $(n+1)^{ième}$ jour.
$\boxed{a_{n+1}=a_n+0{,}15\,b_n-0{,}1\,a_n-5}$
b_{n+1} est le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin B à la fin du $(n+1)^{ième}$ jour.
$\boxed{b_{n+1}=b_n-0{,}15\,b_n+0{,}1\,a_n+5}$

Remarque
Pour tout entier naturel n, on a : $a_n+b_n=2200$ donc $a_n=2200-b_n$ et $b_n=2200-a_n$
$a_{n+1}=0{,}9\,a_n+0{,}15(2200-a_n)-5$
$\boxed{a_{n+1}=0{,}75\,a_n+325}$

$b_{n+1}=0{,}85\,b_n+0{,}1(2200-b_n)+5$
$\boxed{b_{n+1}=0{,}75\,b_n+225}$

En B3 on écrit : =0,75*B2+325

En C3 on écrit : =0,75*C2+225

On obtient en B3 : 1150 et en C3 : 1050

En étirant jusque B20 et C20, on obtient la feuille de calcul suivante.
En A3 on écrit : =A2+1 et on étire jusque A20

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100	1100
3	1	1150	1050
4	2	1187.5	1012.5
5	3	1215.63	984.38
6	4	1236.72	963.28
7	5	1252.54	947.46
8	6	1264.4	935.6
9	7	1273.3	926.7
10	8	1279.98	920.02
11	9	1284.98	915.02
12	10	1288.74	911.26
13	11	1291.55	908.45
14	12	1293.66	906.34
15	13	1295.25	904.75
16	14	1296.44	903.56
17	15	1297.33	902.67
18	16	1298	902
19	17	1298.5	901.5
20	18	1298.87	901.13

3 . La suite (a_n) est **croissante** et la suite (b_n) est **décroissante**.
On peut penser que les deux suites **convergent** (elles sont monotones et bornées).
En regardant la feuille de calcul, on conjecture (par exemple) que la suite (b_n) **converge vers 900**.

Partie B

1 . MS+R= $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9\times1300+0{,}15\times900 \\ 0{,}1\times1300+0{,}85\times900 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

MS+R= $\begin{pmatrix} 1170+135 \\ 130+765 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1305-5 \\ 895+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$ =S

Donc, **S=MS+R**

En utilisant les propriétés du calcul matriciel, on obtient :
$X_{n+1}-S=MX_n+R-(MS+R)=MX_n-MS=M(X_n-S)$

2 . X_0 -S= $\begin{pmatrix} 1100 \\ 1100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ 200 \end{pmatrix}$

X_n - S= M^n (X_0 -S)= $\begin{pmatrix} -200\times(0{,}6+0{,}4\times0{,}75^n)+200\times(0{,}6-0{,}6\times0{,}75^n) \\ -200\times(0{,}4-0{,}4\times0{,}75^n)+200\times(0{,}4+0{,}6\times0{,}75^n) \end{pmatrix}$

X_n -S= $\begin{pmatrix} -120-80\times0{,}75^n+120-120\times0{,}75^n \\ -80+80\times0{,}75^n+80+120\times0{,}75^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200\times0{,}75^n \\ 200\times0{,}75^n \end{pmatrix}$

X_n =(X_n -S)+S

$X_n = \begin{pmatrix} 1300-200\times0{,}75^n \\ 900+200\times0{,}75^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

Donc, $\boxed{a_n=1300-200\times0{,}75^n}$ et $\boxed{b_n=900+200\times0{,}75^n}$

-1<0,75<1 donc $\lim_{n\to+\infty} 0{,}75^n = \underline{0}$

Conséquence :
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \underline{1300}$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = \underline{900}$

On valide donc les conjectures que l'on a faites à la question 3 de la partie A.

4 . $1300 - a_n = 200\times 0{,}75^n$ et $b_n - 900 = 200\times 0{,}75^n$

On a :$1300 - a_n < 1{,}5$ et $b_n - 900 < 1{,}5$ si et seulement si :

$$200\times 0{,}75^n < 1{,}5$$
$$\Leftrightarrow\ 0{,}75^n < \frac{1{,}5}{200}$$
$$\Leftrightarrow\ \ln 0{,}75^n < \ln\frac{1{,}5}{200}$$
$$\Leftrightarrow\ n\ln 0{,}75 < \ln\frac{1{,}5}{200}$$
$$\Leftrightarrow\ n > \frac{\ln\frac{1{,}5}{200}}{\ln 0{,}75} \quad \text{car } 0<0{,}75<1 \text{ donc } \ln 0{,}75<0$$

La calculatrice donne $n > 17{,}01$
Or, n est un entier naturel, on obtient $\underline{n=18}$
On peut vérifier en utilisant la feuille de calcul.