Exercice 1 5 points

Probabilités conditionnelles. Lois normales

Les trois parties A,B et C peuvent être traitées de manière indépendantes. Les probabilités seront arrondies au dix-millième.
Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8h 00. Pour cela,il utilise, selon les jours,deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

PARTIE A

L'élève part tous les jours à 7h 40 de son domicile et doit arriver à 8h 00 à son lycée.
Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'événement : « L'élève se rend au lycée à vélo», B l'événement : « L'élève se rend au lycée en bus» et R l'événement : « 'élève arrive en retard au lycée».

1 . Traduire la situation par un arbre de probabilités.

2 . Déterminer la probabilité de l'événement $V \cap R$.

3 . Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,0192.

4 . Un jour donné,l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

PARTIE B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée. Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart type $\sigma = 1{,}2$.

1 . Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.

2 . Il part de son domicile à vélo à 7h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?

3 . L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

PARTIE C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours,exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart type σ'.
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.
On note Z' la variable aléatoire égale à : $\frac{T'-15}{\sigma'}$

1 . Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?

2 . Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart type σ' de la variable aléatoire T'.

<u>**Correction :**</u>

PARTIE A

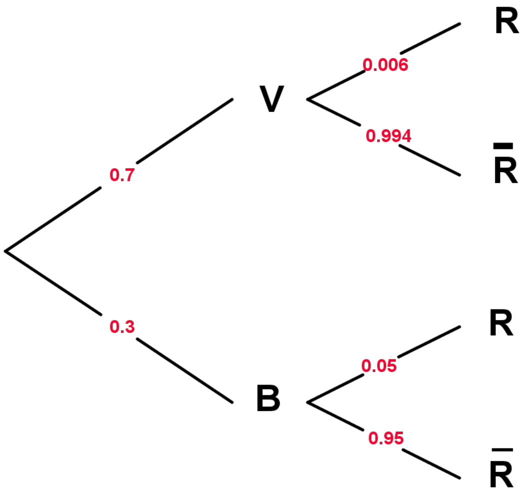
1 . L'élève prend le vélo 7 jours sur 10, donc $P(V)=\frac{7}{10}$ $=\underline{0,7}$.

$B=\overline{V}$, donc P(B)=1-0,7=$\underline{0,3}$.

Les jours où l'élève prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas, donc :
$P_V(\overline{R})=\underline{0,994}$ et $P_V(R)=1-0,994=\underline{0,006}$

Les jours où l'élève prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas, donc :
$P_B(R)=\underline{0,05}$ et $P_B(\overline{R})=1-0,05=\underline{0,95}$

On obtient donc l'arbre pondéré suivant :



2 . $P(V\cap R)=P(V)\times P_V(R)=0,7\times 0,006=\underline{0,0042}$

3 . En utilisant **l'arbre pondéré** ou **la formule des probabilités totales**, on obtient :

$P(R)=P(V)\times P_V(R)+P(B)\times P_B(R)$

$P(R)=0,0042+0,3\times 0,05=0,0042+0,015=\underline{0,0192}$

4 . On nous demande de calculer : $P_R(B)$

$$P_R(B)=\frac{P(R\cap B)}{P(R)}=\frac{0,3\times 0,05}{0,0192}=\frac{0,015}{0,0192}$$

$$P_R(B)=\frac{150}{192}=\underline{0,7813}$$

PARTIE B

T suit la loi normale d'espérance $\mu=17$ et d'écart type $\sigma=1,2$

1 . On nous demande de déterminer : $P(15\leqslant T\leqslant 20)$
La calculatrice donne : $P(15\leqslant T\leqslant 20)=$**0,7936**

2 . L'élève doit arriver à 8h au lycée
On doit déterminer $P(T>20)$
La calculatrice donne : $P(T>20)=$**0,0062**

3 . On détermine le nombre réel t tel que : $P(T\leqslant t)=0,9$
la calculatrice donne : **18,5379**
On arrondit à la minute donc t =19
L'heure de départ de l'élève pour avoir une probabilité de 0,9 d'arriver à l'heure au lycée est 8h–19 min soit **7 h 41 min**

PARTIE C

T' suit la loi normale d'espérance $\mu'=15$ et d'écart type σ'
On sait que $P(T'>20) = 0,05$

1 . $Z'=\frac{T'-15}{\sigma'}=\frac{T'-\mu}{\sigma'}$
Donc Z' suit **la loi centrée et réduite**.

2 . On détermine le nombre réel z' tel que : $P(Z'>z')=0,05$
La calculatrice donne : $z'=$**1,6449**

$Z'>z' \Leftrightarrow \frac{T'-15}{\sigma'}>z'=1,6449 \Leftrightarrow T'-15>1,6449\,\sigma' \Leftrightarrow T'>15+1,66449\,\sigma'$

On a donc
$P(T'>15+1,6449\,\sigma')=0,05$ et $P(T'>20)=0,05$
On obtient $15+1,6449\,\sigma'=20$ soit $1,6449\,\sigma' = 5$

$\sigma'=\frac{5}{1,6449}=$**3,04**