Exercice 2 — 5 points

VRAI-FAUX (avec justifications) de géométrie de l'espace

Pour chacune des propositions suivantes,indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-y+3z+1=0$ et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=-5+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

On donne les points A(1;1;0), B(3;0 ;-1) et C(7;1 ;-2).

PROPOSITION 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x=5-2t \\ y=-1+t \\ z=-2+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

PROPOSITION 2 :

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

PROPOSITION 3 :

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

PROPOSITION 4 :

La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées (8;3 ;-4).

PROPOSITION 5 :

Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

Correction :

PROPOSITION 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x=5-2t \\ y=-1+t \\ z=-2+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=5-2t \\ y=-1+t \\ z=-2+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, est la droite Δ passant par le point F(5 ;-1 ;-2) et de vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or la droite (AB) est la droite passant par A(1;1;0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On peut écrire une représentation paramétrique de la droite (AB) $\begin{cases} x=1+2k \\ y=1-k \\ z=0-k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

On remarque que : $\vec{V} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ donc les droites (AB) et Δ sont **parallèles**.
Pour démontrer que (AB) = Δ il suffit de vérifier que $A \in \Delta$ (on pourrait vérifier que $F \in (AB)$)
On considère le système

$$\begin{cases} 1=5-2t \\ 1=-1+t \\ 0=-2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=4 \\ t=2 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow t=2$$

Conclusion
$A \in \Delta$ donc Δ et (AB) sont **confondues**.

La PROPOSITION 1 est vraie

PROPOSITION 2 :

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

$\mathscr{D}$ est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=-5+3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$\vec{U}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de (AB).

$\vec{U} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\times2 + 1\times(-1) + 3\times(-1) = 0$

Les vecteurs $\vec{U}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont **orthogonaux** donc les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont **orthogonales**.

La PROPOSITION 2 est vraie

PROPOSITION 3 :

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Les vecteurs $\vec{U}$ et $\overrightarrow{AB}$ **ne sont pas colinéaires** (ils sont orthogonaux et non nuls) donc les droites $\mathscr{D}$ et (AB) **ne sont pas parallèles**.

Conséquence : les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes.

On considère le système :

$$\begin{cases} 2t=1+2k \\ 1+t=1-t \\ -5+3t=0-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-2k=1 \\ t=-k \\ 3t+k=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+2t=1 \\ t=-k \\ 3t-t=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{4} \\ k=\frac{1}{4} \\ t=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Conclusion :
$\mathscr{D}$ et (AB) **ne sont pas sécantes**.

Et donc, $\mathscr{D}$ et (AB) **ne sont pas coplanaires**.

La PROPOSITION 3 n'est pas vraie

PROPOSITION 4 :

La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées (8;3 ;-4).

Pour démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ sont sécants et calculer les coordonnées du point d'intersection, on considère le système :

$$\begin{cases} x-y+3z+1=0 \\ x=2t \\ y=1+t \\ z=-5+3t \end{cases} \quad \text{par substitution}$$

$$2t-(1+t)+3(-5+3t)+1=0$$
$$2t-1-t-15+9t+1=0$$
$$10t=15$$
$$t=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

Donc $\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{5}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants en $E\left(3\,;\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$

La PROPOSITION 4 n'est pas vraie

PROPOSITION 5 :

Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

$\mathscr{P}: \ x-y+3z+1=0$

$\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal** à $\mathscr{P}$

(ABC) $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **ne sont pas colinéaires** donc les points A; B et C **ne sont pas alignés**.

Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont **parallèles** si et seulement si $\vec{N}$ est **un vecteur normal au plan** (ABC).

$\vec{N}\,.\,\overrightarrow{AB} = 1\times 2+(-1)\times(-1)+3\times(-1) = \underline{0}$

$\vec{N}\,.\,\overrightarrow{AC} = 1\times 6+(-1)\times 0+3\times(-2) = \underline{0}$

$\vec{N}$ est **orthogonal à deux vecteurs non colinéaires** du plan (ABC) donc $\vec{N}$ est **un vecteur normal au plan** (ABC).

Conséquence :
Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont **parallèles**.

La PROPOSITION 5 est vraie