Exercice 3 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

PARTIE A

1 . On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2 . Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

PARTIE B

Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$,de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $\mathscr{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=t$.

1 . Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.

2 . On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathscr{A}$?

3 . On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équations $x=\alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, en deux parties de même aire, et trouver une valeur approchée de ce réel.

a . Démontrer que l'équation $\mathscr{A}(t)=\dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b . Sur le graphique fourni en annexe (à rendre avec la copie) sont tracées la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathscr{A}$

Sur le graphique de l'annexe, identifier les courbes $\mathscr{A}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.

En déduire une valeur approchée du réel α. Hachurer le domaine correspondant à $\mathscr{A}(\alpha)$.

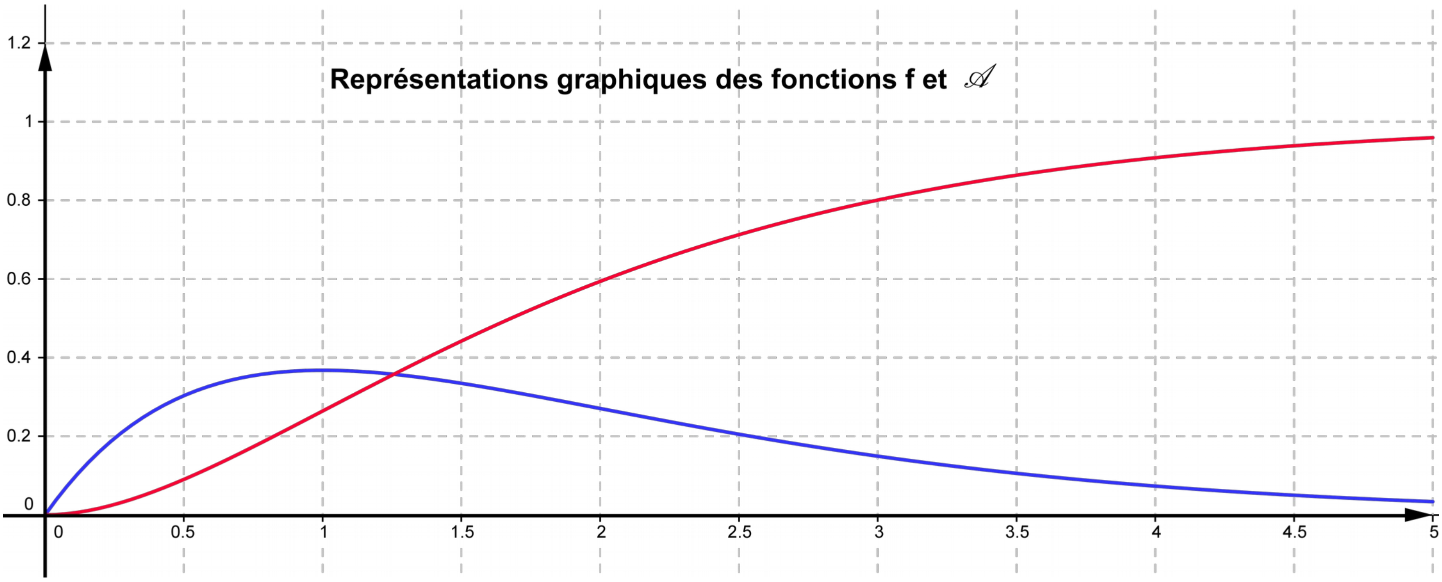
4 . On définit la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

a . On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, calculer $g'(x)$.

b . En déduire pour tout réel de l'intervalle $[0;+\infty[$,une expression de $\mathscr{A}(t)$.

c . Calculer une valeur approchée à $\boxed{10^{-2}}$ près de $\mathscr{A}(6)$.

ANNEXE 1


Représentations graphiques des fonctions f et $\mathscr{A}$
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Correction :

PARTIE A

$x \in [0\,;+\infty[\qquad f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$

1 . f est dérivable sur $[0;+\infty[$.
On dérive un produit et $(\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}$
Donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x(-\mathrm{e}^{-x}) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$
Pour tout nombre réel positif ou nul, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc **le signe** de $f'(x)$ est le signe de $1-x$.
Conséquence :
Si $x \in [0;1[$ alors $f'(x) > 0$ donc f est **strictement croissante** sur $[0;1[$.
Si $x \in]1;+\infty[$ alors $f'(x) < 0$ donc f est **strictement décroissante** sur $]1;+\infty[$.

2 . $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
Et la droite d'équation $y = 0$ est **asymptote** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

On peut dresser le tableau de variation de f .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

On peut affirmer que pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a $f(x) \geqslant 0$

PARTIE B

f est continue et positive sur $[0;+\infty[$ donc $\mathscr{A}(t) = \displaystyle\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathscr{A}$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}(0)=0$ donc $\mathscr{A}$ est **la primitive** de f sur $[0;+\infty[$ telle que $\mathscr{A}(0)=0$.

1 . $\mathscr{A}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}'(x) = f(x)$ or $f(x) \geqslant 0$ donc $\mathscr{A}$ est **croissante** sur $[0;+\infty[$.

2 . On admet que l'aire du domaine plan situé sous la courbe $\mathscr{C}$ et au-dessus de l'axes des abscisses sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est égale à 1 donc la limite en $+\infty$ de $\mathscr{A}(x)$ est **égale à 1**.

3 . a . $\mathscr{A}$ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans l'intervalle $[0;1[$; $\dfrac{1}{2} \in [0;1[$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que $\frac{1}{2}$ admet un unique antécédent par $\mathscr{A}$ appartenant à $[0;+\infty[$ c'est à dire que l'équation $\mathscr{A}(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution unique α appartenant à $[0;+\infty[$.

b . $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f est la courbe en bleu sur le dessin (f est d'abord croissante puis décroissante).

Γ la courbe représentative de $\mathscr{A}$ est la courbe en rouge sur le dessin ($\mathscr{A}$ est croissante sur $[0;+\infty[$).

I est le point d'intersection de Γ et de la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$.

α est l'abscisse de I, on détermine graphiquement pour valeur approchée de α: 1,7

$\mathscr{A}(\alpha)=\frac{1}{2}$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$ (on hachure le domaine sur le dessin).

4 . $x\in[0;+\infty[$ $\quad g(x)=(x+1)e^{-x}$

a . g est dérivable sur $[0;+\infty[$

$g'(x)=1\times e^{-x}+(x+1)(-e^{-x})=-x\,e^{-x}$

$g'(x)=-f(x)$

b . $-g$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

$\mathscr{A}$ est aussi une primitive de f sur $[0;+\infty[$

Il existe donc un nombre K tel que pour tout nombre réel positif ou nul x on ait :

$\mathscr{A}(x)=-g(x)+K$

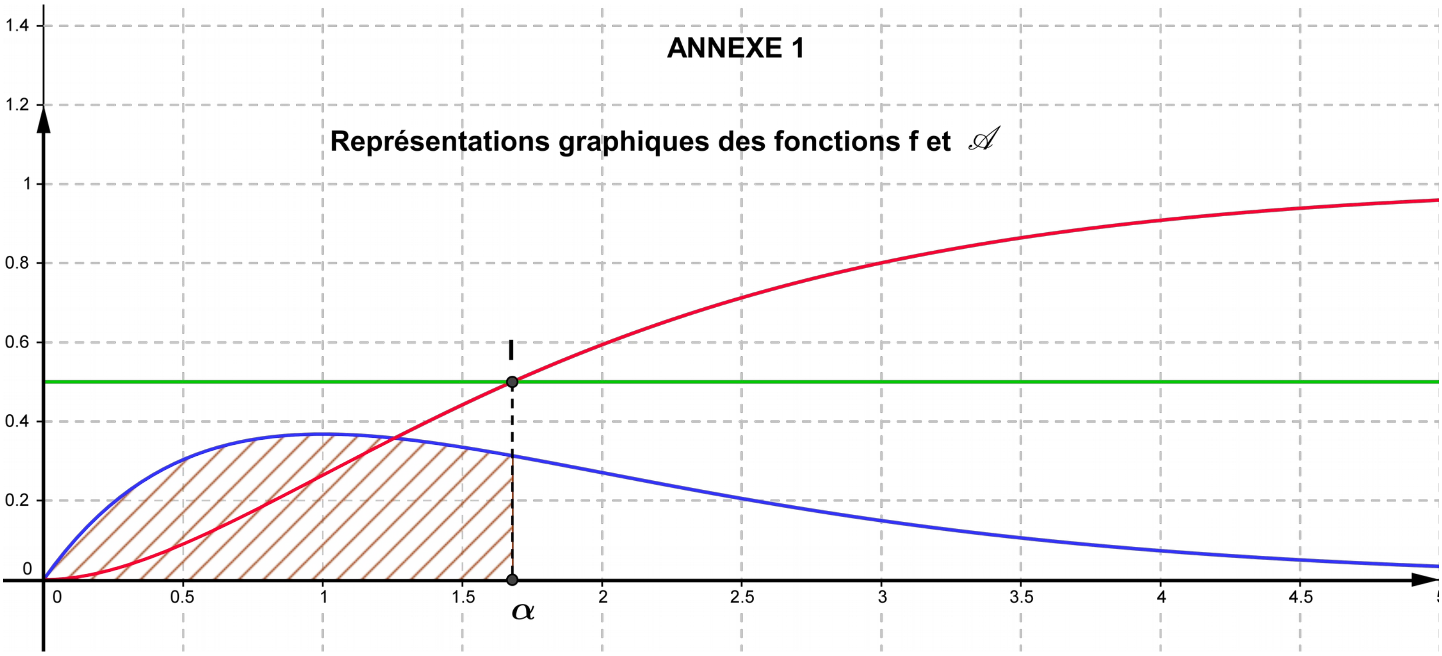
or $\mathscr{A}(0)=0$ et $\mathscr{A}(0)=-g(0)+K$

$-g(0)=-(0+1)e^0=-1$

Donc, K=1

Par suite, pour $x\in[0;+\infty[$, $\mathscr{A}(x)=1-(x+1)e^{-x}$

c . $\mathscr{A}(6)=1-7e^{-6}\approx$ 0,98


ANNEXE 1
Représentations graphiques des fonctions f et $\mathscr{A}$
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
α