Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi la spécialité 5 points

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3}$ -i et pour tout entier naturel n :
$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n$

Les parties A et B peuvent *être traitées de façon indépendante.*

PARTIE A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$

1 . Calculer u_0 .

2 . Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

3 . Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .

4 . Déterminer la limite de la suite (u_n) .

5 . Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

PARTIE B

1 . Déterminer la forme algébrique de z_1 .

2 . Déterminer la forme exponentielle de z_0 et 1+i.
En déduire la forme exponentielle de z_1 .

3 . Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Correction :

PARTIE A

1 . $u_0 = |\sqrt{3} - \mathrm{i}| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

2 . Pour tout entier naturel n

$u_{n+1} = |z_n| = |(1+\mathrm{i})z_n| = |1+\mathrm{i}| \times |z_n| = \sqrt{1+1} \times u_n$

Donc, $u_{n+1} = \sqrt{2} \times u_n$

(u_n) est **la suite géométrique** de premier terme 2 et de raison $\sqrt{2}$.

3 . Pour tout entier naturel n :

$\boxed{u_n = u_0 \times q^n = 2 \times (\sqrt{2})^n}$

4 . $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

5 .

Variables	. :	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	. :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	. :	Demander la valeur de p
Traitement	. :	***TANT QUE u*** $\leqslant$ p ***Affecter à n la valeur n+1*** ***Affecter à u la valeur*** $\sqrt{2}$ ***u*** ***FIN TANT QUE***
Sortie	. :	***Afficher n***

PARTIE B

1 . $z_1 = (1+\mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = \sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{3} - \mathrm{i} - \mathrm{i}^2$

$\boxed{z_1 = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)}$

2 . $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ $\qquad |z_0| = u_0 = 2$

$\boxed{z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)}$

$\arg(z_0) = \theta_0 \ (2\pi)$

$\cos(\theta_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta_0) = -\frac{1}{2}$

donc $\theta_0 = -\frac{\pi}{6} \ (2\pi)$

et $\boxed{z_0 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\arg(1+i) = \alpha \ (2\pi)$

$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\alpha = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

et $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_1 = (1+i)z_0 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\times\left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) = 2\sqrt{2}e^{\left(i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{6}\right)} = \boxed{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$

3. $z_1 = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

$z_1 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\,2\sqrt{2}\,i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

donc $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}+1$

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

