Exercice 4 **Candidats ayant suivi la spécialité** *5 points*

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.
Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.
Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.
Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.
Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.
Les premières observations nous montrent que,d'un jour au jour suivant :

- 5 % des individus tombent malades.
- 20 % des individus guérissent.

Pour un entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience. On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0=1$, $b_0=0$ et $c_0=0$.

1 . Calculer a_1, b_1 et c_1

2 . a . Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ?
En déduire a_{n+1} en fonction de a_n .

b . Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
On admet que $c_{n+1}=0{,}2\,b_n+c_n$.

Pour tout entier naturel n , on définit $U_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

On définit les matrices $A=\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D=P^{-1}\times A\times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n=P\times D^n\times P^{-1}$.

3 . a . Vérifier que pour tout entier naturel n , $U_{n+1}=A\times U_n$
On admet que,pour tout entier naturel n , $U_n=A^n\times U_0$

b . Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $D^n=\begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet que $A^n=\begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\left(0{,}95^n-0{,}8^n\right) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(3-4\times 0{,}95^n+0{,}8^n\right) & 1-0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$

4 . a . Vérifier que pour tout entier naturel n , $b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$

b . Déterminer la limite de la suite (b_n)

c . On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours puis décroit.
On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum
A cet effet, on utilise l'algorithme donné en annexe 2 (à rendre avec la copie), dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).
Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en annexe 2. Conclure.

ANNEXE 2

ALGORITHME ET TABLEAU A COMPLETER

```
Variables          b,b',x,y sont des réesll
                   k est un entier naturel

Initialisation     Affecter à b la valeur 0
                   Affecter à b' la valeur 0.05
                   Affecter à k la valeur 0
                   Affecter à x la valeur 0.95
                   Affecter à y la valeur 0.8

Traitement         Tant que b < b' faire:
                     Affecter àk la valeur k+1
                     Affecter à b la valeur b'
                     Affecter à x la valeur 0.95x
                     Affecter à y la valeur 0.80y
                     affecter à b' la valeur ..........
                   Fin tant que

Sortie             Afficher ........
```

	k	b	x	y	b'	Test: b < b'
Après le $7^{è}$ passage dans la boucle Tant que	7	0.1628	0.6634	0.1678	0.1652	Vrai
Après le $8^{è}$ passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le $9^{è}$ passage éventuel dans la boucle Tant que						

Correction :

1 . Au début de l'expérience tous les individus sont sains, donc $a_0 = \underline{1}$; $b_0 = \underline{0}$ et $c_0 = \underline{0}$

Au jour n=1, 5 % des individus sains tombent malades donc il reste 95 % d'individus sains.
Il n'y avait pas d'individus malades donc il n'y a pas d'individus guéris.
Conclusion
$a_1 = 0{,}95 \times a_0$; $b_1 = 0{,}05 \times a_0$ et $c_1 = 0$
$a_1 = \underline{0{,}95}$; $b_1 = \underline{0{,}05}$; $c_1 = \underline{0}$

2 . a . Il y a 95 % d'individus sains qui restent sains d'un jour sur l'autre.
Donc pour tout entier naturel n, $\boxed{a_{n+1} = 0{,}95\, a_n}$

b . Pour le passage du jour n au jour n+1
b_n est la proportion du nombre d' individus malades au jour n.
b_{n+1} est la proportion du nombre d'individus malades au jour n+1.

20 % des individus malades au jour n guérissent au jour n+1 donc 80 % des individus malades au jour n restent malades au jour n+1.
Donc la proportion des individus malades au jour n restant malade au jour n+1est : $\boxed{0{,}8\, b_n}$

5 % des individus sains au jour n deviennent malades au jour n+1donc la proportion des individus sains au jour n devenant malades le jour n+1 est : $\boxed{0{,}05\, a_n}$
Conclusion
$b_{n+1} = 0{,}05\, a_n + 0{,}8\, b_n$
On admet que : $c_{n+1} = 0{,}2\, b_n + c_n$

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 . a . Pour tout entier naturel n

$$AU_n = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95\, a_n \\ 0{,}05\, a_n + 0{,}8\, b_n \\ 0{,}2\, b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

donc $U_{n+1} = AU_n$

On admet que $U_n = A^n U_0$

b . On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier n :

$$D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Initialisation :

Pour n=0

$$\mathrm{D}^0=\mathrm{I} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0{,}95^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité :

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, onsuppose que :

$$\mathrm{D}^n=\begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on doit démontrer que : } \mathrm{D}^{n+1}=\begin{pmatrix} 0{,}95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or, } \mathrm{D}^{n+1}=\mathrm{D}^n\times\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}95^n\times 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n\times 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=+$$
$$\begin{pmatrix} 0{,}95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'hérédité est vérifiée

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, nous pouvons affirmer que la propriété est vérifiée pour tout entier naturel non nul n .

4 . a . Pour tout entier naturel n :

$$\mathrm{U}_n=\mathrm{A}^n\,\mathrm{U}_0=\begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n-0{,}8^n) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3-4\times 0{,}95^n+0{,}8^n) & 1-0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}95^n \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n-0{,}8^n) \\ \frac{1}{3}(3-4\times 0{,}95^n+0{,}8^n) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{3}(0{,}95^n-0{,}8^n)}$$

b . -1<0,95<1 donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}95^n=\underline{0}$

-1<0,8<1 donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}8^n = \underline{0}$

conséquence : $\lim\limits_{x \to +\infty} b_n = \underline{0}$

c . On complète l'algorithme :

Initialisation

$b = b_0 = 0$
$b' = b_1 = 0{,}05$
$k = 0$
$x = 0{,}95$
$y = 0{,}8$

Après le premier passage

$k = 1$
$b = b_1$
$x = 0{,}95^2$
$y = 0{,}8^2$
$b' = \frac{1}{3}(0{,}95^2 - 0{,}8^2) = b_2$

Après le septième passage

$k = 7$
$b = b_7 \simeq 0{,}1628$
$x = 0{,}95^8 \simeq 0{,}6634$
$y = 0{,}8^8 \simeq 0{,}1678$
$b' = b_8 \simeq 0{,}1652$

$b_7 < b_8$

Après le huitième passage

$k = 8$
$b = b_8 \simeq 0{,}1652$
$x = 0{,}95^9 \simeq 0{,}6302$
$y = 0{,}8^9 \simeq 0{,}1342$
$b' = b_9 \simeq 0{,}1653$

$b_8 < b_9$

Après le neuvième passage

$k = 9$
$b = b_9 \simeq 0{,}1653$
$x = 0{,}95^{10} \simeq 0{,}5987$
$y = 0{,}8^{10} \simeq 0{,}1342$
$b' = b_{10} \simeq 0{,}1638$
$b_9 > b_{10}$

Le pic épidémique est atteint le neuvième jour, on a 16,53 % des individus qui sont malades.

On joint le tableau complété

Variables	b,b',x,y sont des réesll k est un entier naturel
Initialisation	Affecter à b la valeur 0 Affecter à b' la valeur 0.05 Affecter à k la valeur 0 Affecter à x la valeur 0.95 Affecter à y la valeur 0.8

Traitement	Tant que b < b' faire:
	  Affecter àk la valeur k+1
	  Affecter à b la valeur b'
	  Affecter à x la valeur 0.95x
	  Affecter à y la valeur 0.80y
	  affecter à b' la valeur $\frac{1}{3}(x-y)$
	Fin tant que

Sortie	Afficher **k**

	k	b	x	y	b'	Test: b < b'
Après le $7^{è}$ passage dans la boucle Tant que	7	0.1628	0.6634	0.1678	0.1652	Vrai
Après le $8^{è}$ passage éventuel dans la boucle Tant que	8	0.1652	0.6302	0.1342	0.1653	Vrai
Après le $9^{è}$ passage éventuel dans la boucle Tant que	9	0.1653	0.5987	0.1074	0.1638	Faux