Exercice 1 4 points

Cet exercice est un Q.C.M. (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera le numéro de la question et de la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte un point.Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit z le nombre complexe de la forme $x+\mathrm{i}\,y$,où x et y sont des réels.

1 . Soit z le nombre complexe égal à $(1+\mathrm{i})^4$ .L'écriture exponentielle de z est :

a . $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

b . $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

c . $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

d . $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2 . L'ensemble des points M du plan d'affixe $z=x+iy$ tels que $|z-1+\mathrm{i}|=|\sqrt{3}-\mathrm{i}|$ a pour équation ;

a . $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

b . $(x+1)^2+(y-1)^2=2$

c . $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

d . $y=x+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

3 . On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par :
$\mathrm{Z}_0=1$ et $\mathrm{Z}_{n+1}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{Z}_n$ .On note M_n le point du plan d'affixe Z_n .

a . Pour tout entier naturel n ,le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

b . Pour tout entier naturel n , le triangle $\mathrm{OM}_n\mathrm{M}_{n+1}$ est équilatéral.

c . La suite(U_n) définie par $\mathrm{U}_n=|\,|\mathrm{Z}_n|\,|$ est convergente.

d . Pour tout entier naturel n ,un argument de $\dfrac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

4 . Soit A,B,C trois points d'affixes respectives :

$Z_A = -1-i$; $Z_B = 2-2i$ et $Z_C = 1+5i$.

On pose $Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$

a . Z est un nombre réel.

b . Le triangle ABC est isocèle en A.

c . Le triangle ABC est rectangle en A.

d . Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment [BC].

Correction :

1 . Réponse b

Justifications non demandées

$$(1+i)^4=[(1+i)^2]^2=(1+2i+i^2)^2=(1+2i-1)^2=(2i)^2=4i^2=-4=4e^{i\pi}$$

2 . Réponse c

Justifications non demandées

$$|z-1+i|=|\sqrt{3}-i|$$
$$\Leftrightarrow |x-1+i(y+1)|=|\sqrt{3}-i|$$
$$\Leftrightarrow |x-1+i(y+1)|^2=|\sqrt{3}-i|^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$$

3 . Réponse c

Justifications non demandées

a . $|Z_0|^2=1^2+1^2=2$ $\qquad |Z_0|=\sqrt{2}$

$$|Z_1|=\left|\frac{1+i}{2}\right|\times\sqrt{2}=\frac{|1+i|}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}=1$$

$|Z_1|\neq\sqrt{2}$ donc la réponse a. est fausse

b . $OM_n=|Z_n|$ et $OM_{n+1}=|Z_{n+1}|$

or $|Z_{n+1}|=\left|\frac{1+i}{2}\right|\times|Z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}\times|Z_n|$

donc $OM_{n+1}\neq OM_n$ et le triangle OM_nM_{n+1} n'est pas équilatéral.
La réponse b. est fausse

c . $U_{n+1}=\left|\frac{1+i}{2}\right|\times U_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\times U_n$ et $U_0=\sqrt{2}$

(U_n) est la suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$

or $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

donc la réponse c. est vraie

d . $$\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}=\frac{\left(\frac{1+i}{2}\right)\times Z_n-Z_n}{Z_n}=\frac{\left(\frac{1+i}{2}-1\right)\times Z_n}{Z_n}=\frac{1+i}{2}-\frac{2}{2}=\frac{-1+i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)$$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\arg(\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}) = \frac{3\pi}{4} \quad (2\pi)$

donc **la réponse d. est fausse**

4 . Réponse c

Justifications non demandées

$$Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{1+5i-(-1-i)}{2-2i-(-1-i)} = \frac{2+6i}{3-i} = \frac{(2+6i)(3+i)}{3^2+1^2} = \frac{6+18i+2i-6}{10} = \frac{20i}{10} = 2i \; = \boldsymbol{2} \quad e^{i\frac{\pi}{2}}$$

a . 2i n'est pas un nombre réel
La réponse a. est fausse

b . $|Z| = \frac{|Z_C - Z_A|}{|Z_B - Z_A|} = \frac{AC}{AB} = |2i| = 2$
donc $AC \neq AB$ le triangle ABC n'est pas isocèle en A .
La réponse b. est fausse

c . $arg \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \arg(Z_C - Z_A) - \arg(Z_B - Z_A) \; (2\pi)$

$\arg(Z) = (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AC}) - (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AB}) \; (2\pi)$
$\arg(Z) = (\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}) \; (2\pi)$
or $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} \; (2\pi)$ car $Z = 2 \quad e^{i\frac{\pi}{2}}$
et $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \; (2\pi)$
donc **la réponse c. est vraie**

d . M appartient à la médiatrice de [BC] si et seulement si MB=MC
B (2 – 2i) M (2i) C (1 + 5i)
$\overrightarrow{MB}$ (2 – 4i) $\overrightarrow{MC}$ (1 + 3i)
$MB^2 = |2-3i|^2 = 4+16 = 20$
$MC^2 = |1+3i|^2 = 1+9 = 10$
$MB^2 \neq MC^2$
donc le point M n'appartient pas à la médiatrice de [BC]
La réponse d. est fausse

