Exercice 2 6points

Les parties A,B, et C sont indépendantes

PARTIE A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :
Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle]0;1[, il existe un unique réel strictement positif χ_{al} tel que P($-\chi_{al} \leqslant X \leqslant \chi_{al}$)=1-α.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Soit H la fonction continue et dérivable sur [0;+∞[par :

$$\mathrm{H}(x)=P(-x \leqslant X \leqslant x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

1 . Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?

2 . Préciser $\mathrm{H}(0)$ et la limite de $\mathrm{H}(x)$ quand x tend vers +∞.

3 . A l'aide de considérations graphiques,montrer que pour tout réel positif x , $H(x)=2\int_0^x f(t)\,dt$

4 . En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur [0;+∞[est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur [0;+∞[.

5 . Démontrer alors le théorème énoncé.

PARTIE B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.
60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % de cette entreprise possèdent un défaut.
Dans le stock total du laboratoire,5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :
A l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise A» ;
B l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise B» ;
D l'événement : « La pipette a un défaut».

1 . La pipette choisie au hasard présente un défaut;quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?

2 . Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{D})=0{,}0224$

3 . Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

PARTIE C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise,au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL. Soit x la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres).
On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ tels que $\mu=100$ et $\sigma^2=1,0424$.

1 . Quelle est alors la probabilité,à 10^{-4} près, pour une pipette prise au hasard soit conforme ?
On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice.

Contenance x (en mL)	95	96	97	98	99
P($X\leqslant x$) (arrondi à 10^{-5})	0,00000	0,00004	0,00165	0,02506	0,16368
Contenance x (en mL)	100	101	102	103	104
P($X\leqslant x$) (arrondi à 10^{-5})	0,5	0,83632	0,97494	0,99835	0,99996

Pour la suite,on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est p= 0,05.

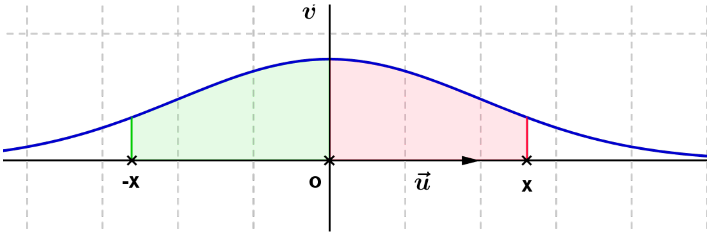
2 . On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur à 100.On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon

a . Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?
b . Vérifier que $n\geqslant30$, $np\geqslant5$ et $n(1-p)\geqslant5$
c . Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

Correction :

PARTIE A

Restitution organisée des connaissances



1 . f est **la densité de probabilité** sur $\mathbb{R}$ pour la loi normale réduite et centrée.
Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et réduite alors pour tout nombres réels a et b tels que $a \leqslant b$ on a :

P($a \leqslant$ X $\leqslant b$)= $\int_a^b f(t)dt$.

2 . H(0)= $\int_0^0 f(t)dt$ =0

H(x)= $\int_{-x}^{x} f(t)dt$ donc $\lim_{x \to +\infty} H(x)$ =1 (définition d'une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$).

3 . Pour tout nombre réel x strictement positif.

H(x)= $\int_{-x}^{x} f(t)dt = \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt$

$\int_0^x f(t)dt$ est l'aire en unités d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe,l'axe des abscisses sur l'intervalle [0;x]. (en rose sur la figure précédente)

$\int_{-x}^{0} f(t)dt$ est l'aire en unités d'aire de la partie de plan comprise entre la courbe,l'axe des abscisses sur l'intervalle [-x;0]. (en vert sur la figure précédente).

F est une fonction paire donc $\int_{-x}^{0} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$

conséquence: H(x)=2 $\int_0^x f(t)dt$

4 . f est continue sur [0;+∞[donc la fonction G définie sur [0;+∞[par G(x)= $\int_0^x f(t)dt$ est la primitive de f sur [0;+∞[telle que G(0)=0.

Donc pour tout nombre réel x positif ou nul on a :
$G'(x)=f(x)$ or $H(x)=2G(x)$ on obtient $H'(x)=2f(x)$

soit $H'=2f$

f est **strictement positive** sur [0;+∞[donc H est **strictement croissante sur [0;+∞[**

x	0		+∞
$H'(x)$		+	
$H(x)$	0	↗	1

5 . H est **continue** et **strictement croissante** à valeurs dans [0;1[, **le théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que 1-α admet **un unique antécédent** χ_α appartenant à]0;+∞[, c'est à dire il existe χ_α unique appartenant à]0;+∞[tel que H(χ_α)=1-α soit $\int_{-\chi_\alpha}^{\chi_\alpha} f(t)\,dt$ =1 - α

et $P(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha)=1-\alpha$.

PARTIE B

60 % des pipettes viennent de l'entreprise A donc P(A)=**0,6** or $\overline{A}=B$, on obtient P(B)=1–0,6=**0,4**

4,6 % des pipettes de l'entreprise A possèdent un défaut donc P_A (D)=**0,046**

Dans le stock total du laboratoire : 5 % des pièces présentent un défaut donc P(D)=**0,05**

1 . On nous demande de calculer P_D (A)

$$P_D(A)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}046\times 0{,}6}{0{,}05}=\frac{46\times 0{,}6}{50}=\frac{55{,}2}{100}$$

P_D (A) = 0,552

2. En utilisant la formule des probabilités totales on obtient ;

P(D∩A)+P(D∩B)=P(D)
(On peut aussi construire un arbre pondéré)
P(D)=0,05 et P(A∩D)= 0,046×0,6 =0,0276

P(B∩D)=0,05–0,0276=**0,024**

3 . On nous demande de calculer P_B (D)

Or P(B∩D)= P(B)×P_B (D)=0,0224

$$P_B(D)=\frac{0{,}0224}{0{,}4}=\frac{0{,}224}{4}=\mathbf{0{,}056}$$

PARTIE C

1 . P(98⩽X⩽102)=P(X⩽102)-P(X⩽98)
=0,97494–0,02506=**0,94988**
$P(98 \leq X \leq 102) \simeq 0{,}94988$
O n peut aussi utiliser la calculette pour obtenir ce résultat.

2 . a. On considère l'épreuve de Bernoulli :
on extrait une pipette du stock
S succès « la pipette présente un défaut » P(S)=**0,05**
$\overline{S}$ échec « la pipette ne présente pas de défaut » $P(\overline{S})$ =**0,95**
On effectue n (n supérieur ou égal à 100) épreuves indépendantes et Y_n est la variable aléatoire égale au nombre de succès en n épreuves.
La loi de probabilité de Y_n est la loi binomiale de paramètres n et p =**0,05**.

b . $n \geqslant 100$ donc n⩾30
$np=5 \geqslant 5$
$n(1-p)=95 \geqslant 5$

c . **L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %** est :

$$I=[p-1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p+1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$$

$p=0{,}05$ et $p(1-p) = 0{,}05\times 0{,}95 = 0{,}0475$

$$I=[0{,}05-1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}0475}}{\sqrt{n}} ; 0{,}05+1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}0475}}{\sqrt{n}}]$$