Exercice 3 — 5points

PARTIE A

Soit f la fonction dérivable,définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
$f(x)=x\ln(x)$

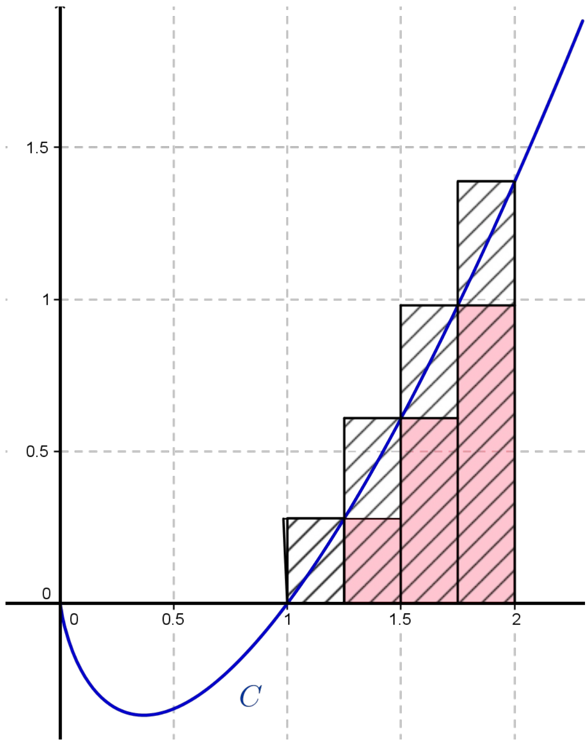
1 . Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2 . O n appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$. Montrer que : $f'(x)=\ln(x)+1$.

3 . Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$.

PARTIE B

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. Soit $\mathscr{A}$ l'aire,en unités d'aire,de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses,la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$.
On utilise l'algorithme suivant pour calculer,par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (voir la figure ci-après).



Algorithme :

Variables

k et n sont des entiers naturels

U , V sont des nombres réels

Initialisation

U prend la valeur 0

V prend la valeur 0

n prend la valeur 4

Traitement

Pour k allant de 0 à $n-1$

Affecter à U la valeur $U+\frac{1}{n}f(1+\frac{k}{n})$

Affecter à V la valeur $V+\frac{1}{n}f(1+\frac{k+1}{n})$

F in Pour

Affichage

Afficher U

Afficher V

1 . a. Que représente U et V sur le graphique précédent ?

b. Quelles sont les valeurs U et V affichées en sotie de l'algorithme(on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?

c. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.

2 . Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n non nul par ;

$$U_n=\frac{1}{n}[f(1)+f(1+\frac{1}{n})+f(1+\frac{2}{n})+...+f(1+\frac{n-1}{n})]$$

$$U_n=\frac{1}{n}[f(1+\frac{1}{n})+f(1+\frac{2}{n})+f(1+\frac{3}{n})+...+f(1+\frac{n-1}{n})+f(2)]$$

On admettra que pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant V_n$

a . Trouver le plus petit entier n tel que $V_n-U_n<0,1$.

b . Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de A d'amplitude inférieure à 0,1 ?

PARTIE C

Soit F la fonction dérivable,définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$$

1 . Montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

2 . Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

Correction :

PARTIE A

1 . $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(x) = +\infty$

2 . f est dérivable sur $]0;+\infty[$. On calcule la fonction dérivée d'un produit :

$$\boxed{f'(x)=\ln(x)+x.\frac{1}{x}=\ln(x)+1}$$

3 . $\ln(x)+1\geqslant 0$

$\Leftrightarrow \ln(x)\geqslant -1=\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow x\geqslant \frac{1}{e}$

$\ln(x)+1<0$

$\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{e}$

on détermine les variations de f en donnant le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$

PARTIE B

1 . a . U est la somme des aires (en U.A.) des trois rectangles situés en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ (en rouge sur la figure) et $U<\mathscr{A}$.

V est la somme des aires des quatre rectangles dont l'un des des sommets est situé au dessus de $\mathscr{C}$ (hachuré sur la figure) et a < V.

b . $U=\frac{1}{4}f(1)+\frac{1}{4}f\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4}f\left(\frac{6}{4}\right)+\frac{1}{4}f\left(\frac{7}{4}\right)$

$V=\frac{1}{4}f\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4}f\left(\frac{6}{4}\right)+\frac{1}{4}f\left(\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{4}f(2)$

$U=0+\frac{1}{4}\times\frac{5}{4}\ln\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{6}{4}\ln\frac{6}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{7}{4}\ln\frac{7}{4}$

La calculatrice nous donne une valeur approchée à 10^{-4} près par défaut : $U \approx$ **0,4666**

$$V=\frac{1}{4}\times\frac{5}{4}\ln\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{6}{4}\ln\frac{6}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{7}{4}\ln\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\times 2\ln 2$$

La calculatrice nous donne une valeur approchée à 10^{-4} près par excès : $V \approx$ **0,8132**

c . $U \leqslant \mathscr{A} \leqslant V$ donc **$0,4666 \leqslant A \leqslant 0,8132$**

2 . a . $V_n - U_n = \frac{1}{n}[f(2)-f(1)] = \frac{1}{n}(2\ln 2)$

$V_n - U_n < 0,1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}(2\ln 2) < 0,1$

$\Leftrightarrow \frac{2\ln 2}{0,1} < n$

on obtient avec la calculatrice $\frac{2\ln 2}{0,1} \simeq 13,86$

Donc le plus petit entier naturel tel que $V_n - U_n < 0,1$ est **$n=14$**

b . Il suffit de modifier la septième ligne de l'algorithme par :

***n* prend la valeur 14**

PARTIE C

1 . F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$F'(x)=\frac{2x}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}-\frac{2x}{4}=x\ln x+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}=x\ln x=f(x)$$

donc F est **une primitive** de f $]0;+\infty[$.

2 . f est continue et positive sur $[1;2]$ donc l'aire en unités d'aire de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ est ;

$$\mathscr{A}=\int_1^2 f(x)\,dx$$

on a $\mathscr{A}= F(2)-F(1)= \frac{4}{2}\ln 2-\frac{4}{4} - 0+\frac{1}{4} = 2\ln 2-\frac{3}{4}$ U.A.

La calculatrice nous donne pour valeur approchée à 10^{-4} près par excès : **0,6363**