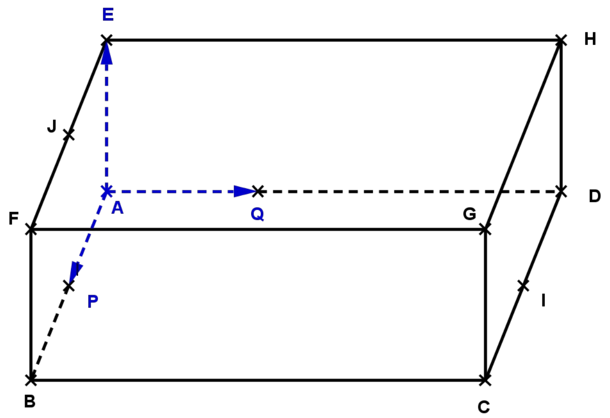
Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité — 5points

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1. On appelle respectivement I,J et P les milieux des segments [CD],[EF] et [AB].

On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle plan **médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ(c'est à dire une sphère qui passe par les quatre points A,B,I,J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AE}\right)$.

1 . Justifier que les quatre points A,B,I et J ne sont pas coplanaires.

2 . Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].

3 . Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y-z-4=0$.
Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur de [IJ].

4 . a . Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b . Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est ;

$$\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=3t-4 \end{cases}$$ où t décrit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

c . Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega A = \Omega I$.

d . Montrer que le point Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

Correction :

1 . Les points A,B et J appartiennent à la face (ABFE) du parallélépipède et le point I appartient à la face opposée (CDHG) donc **les quatre points A,B,I et J ne sont pas coplanaires**.

2 . Le plan (P_1) médiateur de [AB] est le plan **passant par le point P (1 ;0 ;0)** et **de vecteur normal** :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$.

Donc, $M(x;y;z)\in(P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\,.\,\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PM}\,.\,\overrightarrow{AB}=2(x-1)+0.\,y+0.\,z=2x-2$

(P_1) : $2x-2=0$

(P_1) : $\boldsymbol{x-1=0}$

3 . On détermine les coordonnées des sommets du parallélépipède dans le repère $(A;\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AE})$

A (0;0;0) B (2;0;0) D (0;3;0) E (0;0;1)

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ C (2 ; 3 ; 0)

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$ F (2; 0 ; 1)

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$ H (0 ; 3 ; 1)

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$ G (2 ; 3 ; 1)

I est **le milieu de [CD]** $\quad I\left(\frac{2+0}{2};\frac{3+3}{2};\frac{0+0}{2}\right)$

$\boxed{\textbf{I (1 ; 3 ; 0)}}$

J est **le milieu de [EF]** $\quad J\left(\frac{2+0}{2};\frac{0+0}{2};\frac{1+1}{2}\right)$

$\boxed{\textbf{J (1 ; 0 ; 1)}}$

K est **le milieu de [IJ]** $\quad K\left(\frac{1+1}{2};\frac{3+0}{2};\frac{1+0}{2}\right)$

$\boxed{\textbf{K (1 ; 1,5 ; 0,5)}}$

(P_2) est le plan médiateur de [IJ]

(P_2) est le plan **passant par K** et **de vecteur normal** : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$

Donc, $M(x;y;z)\in(P_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{KM}\,.\,\overrightarrow{IJ}=0$

$\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1{,}5 \\ z-0{,}5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KM}\,.\,\overrightarrow{IJ}=0.(x-1)+(-3).(y-1{,}5)+1.(z-0{,}5)=-3y+z+4{,}5-0{,}5$

(P_2) : $-3y+z+4=0$

(P_2) : $3y-z-4=0$

4 . a . Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **ne sont pas colinéaires** donc les plans (P_1) et (P_2) **ne sont pas parallèles** donc les plans (P_1) et (P_2) **sont sécants**.

b . $\begin{cases} x-1=0 \\ 3y-z-4=0 \end{cases}$ on pose $y=t$ (t étant un nombre réel quelconque)

On obtient :

$\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=3t-4 \end{cases}$ où t décrit l'ensemble des nombres réels.

Ce système est **une représentation paramétrique** de la droite d'intersection (Δ) des plans (P_1) et (P_2).

c . Ω est un point de (Δ) donc il existe un réel t tel que Ω (1 ; t ; $3t$-4)

A (0 ; 0 ; 0) I (1 ; 3 ; 0)

$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} -1 \\ -t \\ -3t+4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\Omega I}\begin{pmatrix} 0 \\ 3-t \\ -3t+4 \end{pmatrix}$

$\Omega A=\Omega I \Leftrightarrow \Omega A^2=\Omega I^2 \Leftrightarrow 1^2+t^2+(-3t+4)^2=0^2+(3-t)^2+(-3t+4)^2$

$\Leftrightarrow 1+t^2=(3-t)^2 \Leftrightarrow 1+t^2=9-6t+t^2 \Leftrightarrow 6t=8 \Leftrightarrow t=\frac{4}{3}$

On obtient **$\Omega\left(1\,;\,\frac{4}{3}\,;\,0\right)$**

d . Ω∈(Δ) donc Ω∈(P_1) et Ω∈(P_2)

Ω∈(P_1) on a ΩA=ΩB

Ω∈(P_2) on a ΩI=ΩJ

et on a ΩA=ΩI

conclusion : ΩA=ΩB=ΩI=ΩJ

Ω est donc le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.