Exercice 1 6 points

Une entreprise est spécialisé dans la fabrication de ballons de football. Cette entreprise propose deux tailles de ballons :
. une petite taille
. une taille standard.
Les trois parties sont indépendantes.

Partie A

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence). En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[410;450]$ et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[68;70]$.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes. On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(410\leqslant X\leqslant 450)$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa circonférence en centimètres. On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ.
Déterminer la valeur de σ, au centième près, sachant que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation.
On pourra utiliser le résultat suivant :
Lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée et réduite, alors $P(-\beta\leqslant Z\leqslant\beta)=0,97$ pour $\beta\simeq 2,17$.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation. Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 223 d'entre eux sont conformes à la réglementation. Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de l'entreprise ? Justifier la réponse. (On pourra utiliser l'intervalle de fluctuation)

Partie C

L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard. On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.
On considère les événements :
A : « le ballon de football est de petite taille »
B : « le ballon est de taille standard »
C : « le ballon est conforme à la réglementation »
et $\bar{C}$ est l'événement contraire de C.

1. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le ballon de football soit de petite taille et soit conforme à la réglementation.

3. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,962.

4. Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation. Quelle est la probabilité que ce ballon soit de petite taille ? On arrondira le résultat à 10^{-3} .

Correction :

Partie A

1. X suit la loi normale d'espérance μ=430 et d'écart type σ=10. En utilisant la calculatrice on obtient :
$P(410\leqslant X\leqslant 450)=$ **0,954** à 10^{-3} près

Remarque

On a $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant \mu+2\sigma)=0{,}954$ (Résultat que l'on doit connaître).

2. Y suit la loi normale d'espérance μ = 69 et d'écart type σ.
Les ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation si et seulement si : $68\leqslant Y\leqslant 70$.

La variable aléatoire $Z=\frac{Y-69}{\sigma}$ suit **la loi normale centrée et réduite** $\mathcal{N}(0;1)$.

$68\leqslant Y\leqslant 70 \Leftrightarrow \frac{68-69}{\sigma}\leqslant \frac{Y-69}{\sigma}\leqslant \frac{70-69}{\sigma} \Leftrightarrow \frac{-1}{\sigma}\leqslant Z\leqslant \frac{1}{\sigma}$

Donc, $P(68\leqslant Y\leqslant 70)=0{,}97 \Leftrightarrow P\left(\frac{-1}{\sigma}\leqslant Z\leqslant \frac{1}{\sigma}\right)=0{,}97$

L'énoncé précise que :

$P(-\beta\leqslant Z\leqslant \beta)=0{,}97$ pour $\beta=2{,}17$, donc $\beta=\boxed{\frac{1}{\sigma}}=$**2,17**

et $\sigma=\boxed{\frac{1}{2{,}17}}=$**0,46** à 10^{-2} près.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation. On choisit un échantillon de $n=250$ ballons de taille standard et on considère l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Si $n\geqslant 30$, $np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$ alors $\boxed{I_n=\left[p-1{,}96\times\sqrt{p\frac{(1-p)}{n}}\,;\,p+1{,}96\times\sqrt{p\frac{(1-p)}{n}}\right]}$

Ici, $p=0{,}98$ et $(1-p)=0{,}02$ et $n=250$ donc,

$n=250\geqslant 30$, $np=250\times 0{,}98=245\geq 5$ et $n(1-p)=250\times 0{,}02=5\geq 5$

et $\boxed{I_{250}=\left[0{,}98-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}98\times 0{,}02}{250}}\,;0{,}98+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}98\times 0{,}02}{250}}\right]}$.

La calculatrice donne $0{,}0173\leqslant 1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}98\times 0{,}02}{250}}\leqslant 0{,}0174$

On obtient : $I_{250}=[0{,}98-0{,}017\,;0{,}98+0{,}017]$

$\boxed{I_{250}=[0{,}963\,;0{,}997]}$

La **proportion de ballons** de taille standard conforme à la réglementation dans l'échantillon est :

$f=\frac{233}{250}=$**0,932**

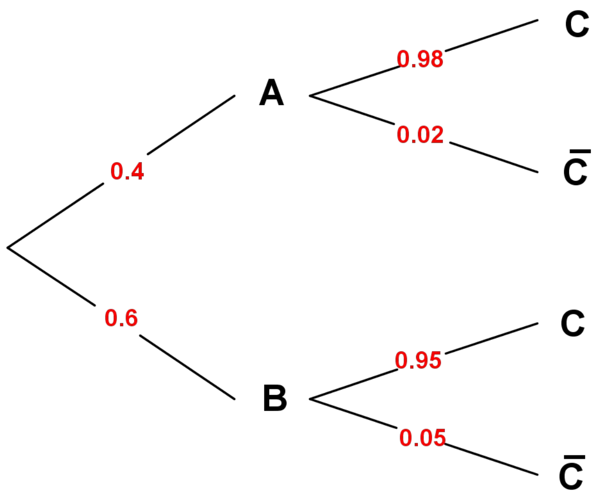
0,932 **n'appartient pas** à I_{250} . **Le résultat de ce contrôle remet en question**, au seuil de 95 %, l'affirmation de l'entreprise.

Partie C

1. L'entreprise produit 40 % de ballons de petite taille et 60 % de taille standard.
On choisit un ballon au hasard donc P(A)=0,4 et P(B)=0,6.

Remarque : $B=\bar{A}$

On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation.
Donc, $P_A(\bar{C})$ =0,02 et $P_B(\bar{C})$ =0,05.
On déduit :
$P_A(C)=1-P_A(\bar{C})=1-0{,}02$ =0,98
$P_B(C)=1-P_B(\bar{C})=1-0{,}05$ =0,95
On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. On nous demande de calculer $P(A\cap C)$
$P(A\cap C)=P(A)\times P_A(C)=0{,}4\times 0{,}98=0{,}392$
$P(A\cap C)$ =0,392

3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :
$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=0{,}4\times 0{,}98+0{,}6\times 0{,}95=0{,}392+0{,}57=0{,}962$
$P(C)$ =0,962

4. On nous demande de calculer : $P_{\bar{C}}(A)$

$$P_{\bar{C}}(A)=\frac{P(A\cap\bar{C})}{P(\bar{C})}$$

$P(A\cap\bar{C})=0{,}4\times 0{,}02=0{,}008$
$P(\bar{C})=1-P(C)=1-0{,}962=0{,}038$

$$P_{\bar{C}}(A)=\frac{0{,}008}{0{,}038}=\frac{8}{38}=\frac{4}{19}\simeq 0{,}211$$

