Exercice 3 — Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0=2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n^2+3u_n-\frac{3}{2}$

Partie A : Conjectures

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles de u_1 et u_2 .

2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .

3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n=u_n-3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n^2$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1\leqslant v_n\leqslant 0$.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}-v_n=-v_n\left(\frac{1}{2}v_n+1\right)$.

b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .

4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?

5. On note l limite de la suite (v_n) .

On admet que l appartient à l'intervalle $[-1\,;0]$ et vérifie l'égalité $l=-\frac{1}{2}l^2$. Déterminer la valeur de l .

6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

Correction :

Partie A : Conjectures

1. $u_1=-\frac{1}{2}\times 2^2+3\times 2-\frac{3}{2}=-2+6-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ $\boxed{u_1=\frac{5}{2}}$

$u_2=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+3\times\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{25}{8}+\frac{15}{2}-\frac{3}{2}=\frac{23}{8}$ $\boxed{u_2=\frac{23}{8}}$

2. $u_3=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{23}{8}\right)^2+3\times\frac{23}{8}-\frac{3}{2}=-\frac{529}{128}+\frac{69}{8}-\frac{3}{2}=-\frac{529}{128}+\frac{57}{8}=\frac{-529+912}{128}=\frac{383}{128}$

$\boxed{u_3=\frac{383}{128}\simeq 2{,}99219}$

En utilisant la calculatrice, on obtient $\boxed{u_4\simeq 2{,}99997}$.

3. Conjectures :

(u_n) est **une suite croissante**

(u_n) est **une suite convergente** (de limite 3)

Partie B : Validations des conjectures

La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n=u_n-3$

1. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-3=-\frac{1}{2}u_n{}^2+3u_n-\frac{3}{2}-3=-\frac{1}{2}u_n{}^2+3u_n-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}(u_n{}^2-6u_n+9)$

$\boxed{v_{n+1}=-\frac{1}{2}(u_n-3)^2=-\frac{1}{2}v_n{}^2}$

2. On veut démontrer en utilisant **un raisonnement par récurrence** que pour tout entier naturel n, on a : $-1\leqslant v_n\leqslant 0$.

Initialisation

$v_0=u_0-3=2-3=-1$ donc $-1\leqslant v_0\leqslant 0$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $-1\leqslant v_n\leqslant 0$ et on doit démontrer que : $-1\leqslant v_{n+1}\leqslant 0$.

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$.

Si $-1\leqslant v_n\leqslant 0$ alors $1\geqslant v_n{}^2\geqslant 0$ et $-\frac{1}{2}\times 1\leqslant -\frac{1}{2}\times v_n{}^2\leqslant 0$

On obtient : $-\frac{1}{2}\leqslant v_{n+1}\leqslant 0$

Conséquence : $-1\leqslant v_{n+1}\leqslant 0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $-1\leqslant v_n\leqslant 0$

3. a. Pour tout entier naturel n

$$\boxed{v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{2}v_n^{\ 2}-v_n=-v_n\left(\frac{1}{2}v_n+1\right)}$$

b. $-1\leqslant v_n\leqslant 0$ donc $-v_n\geqslant 0$ et $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}v_n\leqslant\frac{1}{2}\times 0=0$

On a $1-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}v_n+1\leqslant 1$ et $0\leqslant\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}v_n+1$

conséquence

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1}-v_n\geqslant 0$ et la suite (v_n) est **croissante**.

4. La suite (v_n) est **croissante** et **majoré par 0** donc la suite (v_n) est **convergente**.

5. $l=-\frac{1}{2}l^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}l^2+l=0 \Leftrightarrow l^2+2l=0 \Leftrightarrow l(l+2)=0 \Leftrightarrow (l=0 \text{ ou } l=-2)$

Or, $-1\leqslant l\leqslant 0$ donc **$l=0$**

6. Pour tout entier naturel n

$v_n=u_n-3 \Leftrightarrow u_n=v_n+3$

. (v_n) est **croissante** donc

$v_n\leqslant v_{n+1} \Leftrightarrow v_n+3\leqslant v_{n+1}+3 \Leftrightarrow u_n\leqslant u_{n+1}$

donc la suite (u_n) est **une suite croissante**.

. $\lim_{n\to+\infty} v_n=l=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=$ **3**.

Conclusion

Les conjectures de la partie A sont validées.