Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.

On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :
. 20 % des vélos présents à l'heure n-1 à la station A sont toujours à cette station.
60 % des vélos présents à l'heure n-1 à la station A sont à la station B et les autres sont dans les autres stations du réseau ou en circulation.
. 10 % des vélos présents à l'heure n-1 à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
. Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B.

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = M \times U_n$

2. Déterminer U_1 et U_2.

3. Au bout de combien d'heures reste-t-il un seul vélo dans la station A ?

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.
Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :
Au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B.

On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice I–M.

a. On désigne par V une matrice colonne à deux lignes. Montrer que $V = M \times V + R$ équivaut $N \times V = R$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$. En déduire que $V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = V_n - V$

a. Montrer que $W_{n+1} = M \times W_n$

b. On admet que :
. pour tout entier naturel n, $W_n = M^n \times W_0$

. pour tout entier naturel non nul n, $M^n = \frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

Calculer pour tout entier naturel non nul n, V_n en fonction de n.

c. Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a-t-il tendance à se stabiliser ?

Correction :
Partie A

1. Pour tout entier naturel n :
Au bout de n heures, il y a a_n vélos dans la station A et b_n vélos dans la station B.

20 % des vélos présents au bout de n heures à la station A, sont toujours à la station A à $(n+1)$ heures : soit $\boxed{0{,}2\,a_n}$ vélos.

10 % des vélos présents au bout de n heures à la station B, sont à la station A à $(n+1)$ heures : soit $\boxed{0{,}1\,b_n}$ vélos.

Le nombre de vélos à la station A à $(n+1)$ heures est : $\boxed{a_{n+1}=0{,}2\,a_n+0{,}1\,b_n}$.

Par un raisonnement analogue on obtient : $\boxed{b_{n+1}=0{,}6\,a_n+0{,}3\,b_n}$.

En utilisant **la notation matricielle**, on peut écrire : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

Donc, $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{M}\times\mathrm{U}_n$ et $\mathrm{U}_0=\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

2. $\mathrm{U}_1=\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2\times 50+0{,}1\times 60 \\ 0{,}6\times 50+0{,}3\times 60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{U}_1=\boxed{\begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}}$

$\mathrm{U}_2=\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2\times 16+0{,}1\times 48 \\ 0{,}6\times 16+0{,}3\times 48 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{U}_2=\boxed{\begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}}$

3. $\mathrm{U}_3=\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2\times 8+0{,}1\times 24 \\ 0{,}6\times 8+0{,}3\times 24 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{U}_3=\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}}$

$\mathrm{U}_4=\begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2\times 4+0{,}1\times 12 \\ 0{,}6\times 4+0{,}3\times 12 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{U}_4=\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}}$

$\mathrm{U}_5=\begin{pmatrix} a_5 \\ b_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2\times 2+0{,}1\times 6 \\ 0{,}6\times 2+0{,}3\times 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{U}_5=\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

Donc, $\boxed{a_5=1}$ et $\boxed{b_5=3}$

Conséquence
Au bout de 5 heures, il ne **reste qu'un seul vélo** à la station A.

Partie B

Pour tout entier naturel n :
$\mathrm{V}_n=\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}_{n+1}=\mathrm{M}\times\mathrm{V}_n+\mathrm{R}$ avec $\mathrm{R}=\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$ d'autre part $\mathrm{V}_0=\begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$

1. $\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N}=\mathrm{I}-\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

a. V est une matrice colonne à deux lignes.
En utilisant les propriétés du calcul matriciel, on obtient :
$V=M\times V+R \Leftrightarrow V-M\times V=R \Leftrightarrow I\times V-M\times V=R \Leftrightarrow (I-M)\times V=R \Leftrightarrow N\times V=R$

b. On admet que N est inversible et que $N^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}4 & 0{,}2\\ 1{,}2 & 1{,}6\end{pmatrix}$.

On peut vérifier que : $N\times N^{-1}=I$
$$\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}1\\ -0{,}6 & 0{,}7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1{,}4 & 0{,}2\\ 1{,}2 & 1{,}6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}12-0{,}12 & 0{,}16-0{,}16\\ -0{,}84+0{,}84 & -0{,}12+1{,}12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

On obtient de même : $N^{-1}\times N=I$

On a :
$N\times V=R \Leftrightarrow N^{-1}\times(N\times V)=N^{-1}\times R \Leftrightarrow (N^{-1}\times N)\times V=N^{-1}\times R \Leftrightarrow I\times V=N^{-1}\times R \Leftrightarrow V=N^{-1}\times R$
$$V=\begin{pmatrix}1{,}4 & 0{,}2\\ 1{,}2 & 1{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42+2\\ 36+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44\\ 52\end{pmatrix}$$
$$V=\boxed{\begin{pmatrix}44\\ 52\end{pmatrix}}$$

2. Pour tout entier naturel n, $W_n=V_n-V$
a. Pour tout entier naturel n
$W_{n+1}=V_{n+1}-V=M\times V_n+R-V$ or $V=M\times V+R$
Donc $W_{n+1}=M\times V_n+R-(M\times V+R)=M\times V_n-M\times V=M\times(V_n-V)=M\times W_n$
$\boxed{W_{n+1}=M\times V_n}$

b. On admet que
. Pour tout entier naturel n, $W_n=M^n\times W_0$
. Pour tout entier naturel non nul n, $M^n=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix}$

On a donc : $W_0=V_0-V=\begin{pmatrix}50\\ 60\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}44\\ 52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}$

et, $W_n=M^n\times W_0=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}1{,}2+0{,}8\\ 3{,}6+2{,}4\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel non nul n, $V_n=W_n+V$
$$V_n=\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}44\\ 52\end{pmatrix}$$
$$\begin{cases}\alpha_n=44+\dfrac{2}{2^{n-1}}\\ \beta_n=52+\dfrac{6}{2^{n-1}}\end{cases} \text{ et } V_n=\boxed{\begin{pmatrix}44+\dfrac{2}{2^{n-1}}\\ 52+\dfrac{6}{2^{n-1}}\end{pmatrix}}$$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$

Et, $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \underline{44}$ et $\lim_{n \to +\infty} \beta_n = \underline{52}$.

Le nombre moyen de vélos présents dans la station A aura tendance à se stabiliser (environ 44 vélos). De même pour la station B (environ 52 vélos).