## Exercice 4 — 5 points

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

**Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail**

On modélise le bord supérieur au vantail de droite du portail avec une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)e^{-4x}+b$ où $b$ est un nombre réel.

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;2]$.

**1. a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0;2]$.

**b.** En déduire le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;2]$.

**2.** Déterminer le nombre $b$ pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5m.

Dans la suite la fonction $f$ est définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)e^{-4x}+\frac{5}{4}$.

**Partie B : détermination d'une aire**

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05m de hauteur du sol.

**1.** Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $F(x)=\left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)e^{-4x}+\frac{5}{4}x$ est une primitive de la fonction $f$.

**2.** En déduire l'aire en $m^2$ de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à $10^{-2}$ près de cette aire. ( On s'intéresse à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

**Partie C : utilisation d'un algorithme**

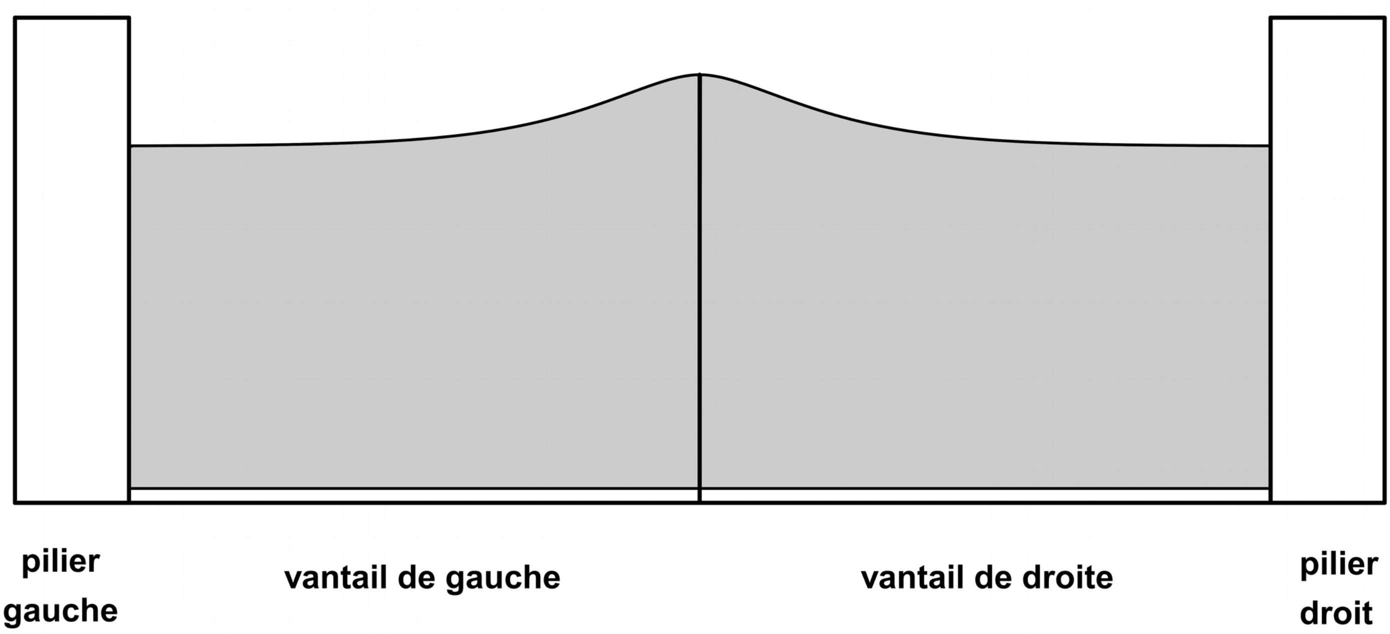
On désire réaliser un portail de même forme mais à partit de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12m, espacées de 0,05m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail ( voir l'annexe 2 de l'exercice 4) et le bas de chaque planche à 0,05 de hauteur à 0,5m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 ; ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

**1.** Donner l'aire de la planche numéro $k$.

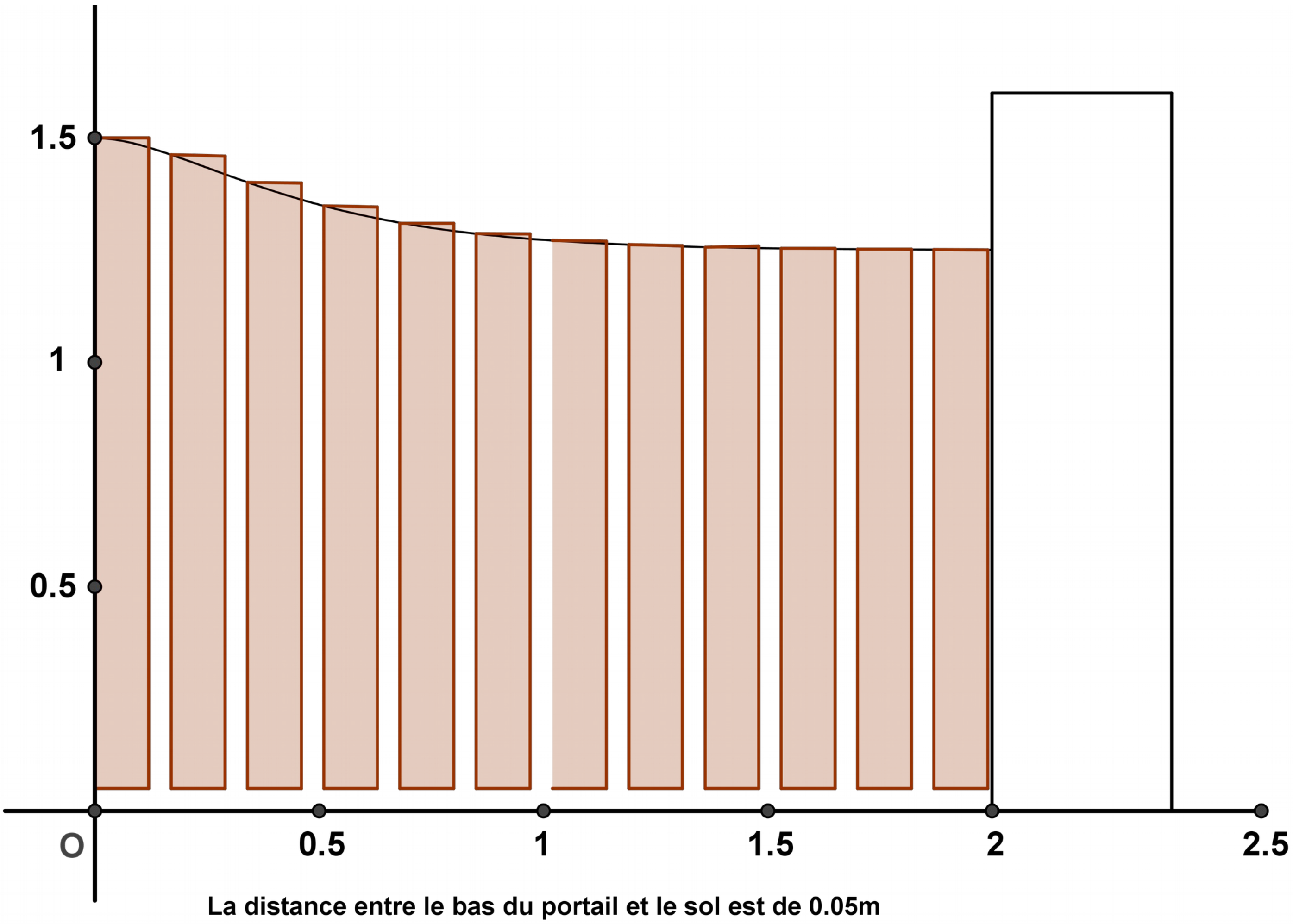
**2.** Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

| | |
|---|---|
| **Variables :** | Les nombres X et S sont des nombres réels. |
| **Initialisation :** | On affecte à S la valeur 0.<br>On affecte à X la valeur 0. |
| **Traitement :** | **Tant Que** X+0,17 < **…**<br>    S prend la valeur S+ **…**<br>    X prend la valeur X+0,17<br>**Fin de Tant Que** |
| **Affichage :** | On affiche S |

ANNEXE 1 de l'exercice 4




ANNEXE 2 de l'exercice 4



**Correction :**

**Partie A : Modélisation de la partie supérieure du portail**

$x$ appartient à l'intervalle $[0:2]$.

$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)e^{-4x}+b$ où $b$ est un nombre réel.

**1. a.** $f$ est dérivable sur $[0;2]$

On dérive un produit et on a $(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-4x})'=-4e^{-4x}$

$\boxed{f'(x)=e^{-4x}+(-4x-1)e^{-4x}=-4xe^{-4x}}$

**b.** Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0;2]$, $e^{-4x}>0$ donc $f'(x)\leq 0$ et $f$ est **strictement décroissante** sur $[0;2]$.

**2.** La fonction $f$ étant strictement décroissante sur $[0;2]$, la **valeur maximale** de $f(x)$ est donc $\boxed{f(0)}$.

$f(0)=1{,}5 \iff \left(0+\frac{1}{4}\right)e^0+b=1{,}5 \iff \frac{1}{4}+b=\frac{3}{2} \iff \boxed{b=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}}$

**Partie B : détermination d'une aire**

**1.** Pour tout $x$ appartenant à $[0;2]$

$F(x)=\left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)e^{-4x}+\frac{5}{4}x$

F est dérivable sur $[0;2]$

$F'(x)=-\frac{1}{4}e^{-4x}-4\left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)e^{-4x}+\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}e^{-4x}+\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-4x}+\frac{5}{4}=\left(x+\frac{1}{4}\right)e^{-4x}+\frac{5}{4}=f(x)$

donc F est **une primitive** de $f$ sur $[0;2]$.

**2.** Soit $g$ la fonction définie sur $[0;2]$ par $g(x)=0{,}05$.

Pour tout nombre réel $x$ appartenant à $[0;2]$ :

$f(x)>\frac{5}{4}>0{,}05$ car $\left(x+\frac{1}{4}\right)e^{-4x}>0$ donc $f(x)>g(x)$.

$f$ et $g$ sont **continues** sur $[0;2]$ et $f(x)\geqslant g(x)$ donc **l'aire** $\mathscr{A}$, en unités d'aire : le $m^2$, du vantail droit est égale à : $\mathscr{A}=\boxed{\int_0^2 (f(x)-g(x))\,dx}$

F est **une primitive** de $f$ sur $[0;2]$ et G définie sur $[0;2]$ par $G(x)=0{,}05x$, est **une primitive** de $g$ sur $[0;2]$.

$\mathscr{A}=\int_0^2 (f(x)-g(x))\,dx=(F(2)-G(2))-(F(0)-G(0))=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)e^{-8}+\frac{5}{2}-0{,}1+\frac{1}{8}e^0$

$\mathscr{A}=-\frac{5}{8}e^{-8}+\frac{5}{2}-\frac{1}{10}+\frac{1}{8}=-\frac{5}{8}e^{-8}+\frac{100-4+5}{40}=\frac{101}{40}-\frac{5}{8}e^{-8}\ m^2$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\mathscr{A}\simeq$ **2,52m²**.

Les deux vantaux sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, donc l'aire du vantail de gauche est égale à l'aire du vantail de droite.

Remarque
Pour construire le vantail de gauche on peut considérer la fonction $h$ définie sur $[-2;0]$ par :
$\boxed{h(x)=\left(-x+\frac{1}{4}\right)e^{4x}+\frac{5}{4}}$.

**Partie C: utilisation d'un algorithme**

**1.** Pour $k=0$ , le coin supérieur gauche de la planche a pour abscisse 0 et pour ordonnée $f(0)$ et la hauteur de la planche est $f(0)-0{,}05$ , la largeur de cette planche est 0,12 donc l'aire (en $m^2$ ) de cette planche est $\boxed{(f(0)-0{,}05)\times 0{,}12}$.

Pour $k=1$ , le coin supérieur gauche de la planche a pour abscisse 0,17 et pour ordonnée $f(0{,}17)$ et la hauteur de la planche est $f(0{,}17)-0{,}05$ et son aire (en $m^2$ ) est $\boxed{(f(0{,}17)-0{,}05)\times 0{,}12}$.

Pour $k=2$ , le coin supérieur gauche de la planche à pour abscisse $2\times 0{,}17$ et pour ordonnée $f(2\times 0{,}17)$ donc l'aire (en $m^2$ ) est : $\boxed{(f(2\times 0{,}17)-0{,}05)\times 0{,}12}$.

Pour la planche numéro $k$ (en considérant le schéma on peut affirmer que $0\leqslant k\leqslant 11$), son aire (en $m^2$ ) est : $\boxed{(f(0{,}17\times k)-0{,}05)\times 0{,}12}$.

**2.** Pour la dernière planche, il faut que l'abscisse du coin gauche soit inférieure à 2 mais aussi l'abscisse du coin droit doit être aussi inférieure à 2 donc l'abscisse du point gauche doit être inférieure à $2-0{,}12=1{,}88$ .

**Algorithme**

| | |
|---|---|
| **Variables :** | les nombres X et S sont des nombre réels |
| **Initialisation :** | On affecte à S la valeur 0 |
| | On affecte à X la valeur 0 |
| **Traitement :** | **Tant Que** X +0,17 < **1,88** |
| | S prend la valeur : S + $\boxed{(f(X)-0{,}05)\times 0{,}12}$ |
| | X prend la valeur : X + 0,17 |
| | **FIN de Tant Que** |
| **Affichage :** | On affiche S. |