Exercice 1 5 points

Les trois parties A, B et C sont indépendantes.
Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2000 pour la vente en gros. On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à 0,003.
On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot. On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

2. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.
Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui à, chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient. On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(110\,;\sigma^2)$ d'espérance $\mu = 110$ et d'écart type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104;116]$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'événement : « la glace est commercialisable » soit égale à 0,98.

Partie C

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %. En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.
Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de l'échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?

Correction :

PARTIE A

Pour tout nombre réel x, on a : $f_1(x)=x+e^x$

1 . $f_1(0)=0+e^0=\underline{1}$
donc $\mathscr{C}_1$ **passe par le point A(0 ;1)**.

PARTIE A

1. Pour chaque lot de 2000 cônes, on considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On choisit au hasard un cône parmi les 2000.
. **succès** S « le cône présente un défaut quelconque avant le conditionnement en gros ». P(S)=**0,003**
. **échec** $\bar{S}$ « le cône ne présente pas de défaut avant le conditionnement en gros ».
$\boxed{P(\bar{S})=1-0{,}003=0{,}997}$
Les tirages sont supposés indépendants les uns des autres donc X la variable aléatoire égale au nombre de succès en 2000 épreuves, admet pour loi de probabilité la loi binomiale de paramètres $n=2000$ et $p=0{,}003$.

2. Le lot de 2000 cônes n'est pas échangé si et seulement si $0\leqslant X\leqslant 11$ donc la probabilité demandée est $P(X\leqslant 11)$.
En utilisant la calculatrice on obtient : $P(X\leqslant 11)=$**0,980**.

Partie B

Y suit une loi normale d'espérance $\mu=110$ et d'écart type σ donc la variable aléatoire $Z=\dfrac{Y-110}{\sigma}$ suit **la loi normale centrée et réduite**.

La probabilité de l'événement « la glace est commercialisable » est $P(104\leqslant Y\leqslant 116)$.
On veut que cette probabilité soit égale à 0,98.

$$104\leqslant Y\leqslant 116 \Leftrightarrow \frac{104-110}{\sigma}\leqslant\frac{Y-110}{\sigma}\leqslant\frac{116-110}{\sigma} \Leftrightarrow -\frac{6}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\frac{6}{\sigma}.$$

Donc $P(104\leqslant Y\leqslant 116)=P\left(-\frac{6}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\frac{6}{\sigma}\right)=0{,}98$

En utilisant la calculatrice on obtient :
$P(-2{,}3255\leqslant Z\leqslant 2{,}3255)=0{,}98=2P(Z\leqslant 2{,}3255)-1$.
C'est à dire que $P(Z\leqslant 2{,}3255)=0{,}99$.
Donc $\frac{6}{\sigma}=2{,}3255$ et $\sigma=\dfrac{6}{2{,}3255}\simeq$ **2,580**
Conséquence : $\sigma=$**2,6** à 10^{-1} près

Partie C

La proportion de personnes consommant régulièrement des glaces dans l'échantillon de 900 personnes en 2010 est : $\dfrac{795}{900}\simeq$ **0,883**.
Donc la proportion f de personnes consommant régulièrement des glaces dans la population en 2010 doit

appartenir à l'intervalle $I=\left[0{,}883-\frac{1}{\sqrt{900}};0{,}883+\frac{1}{\sqrt{900}}\right]$ au niveau de confiance 95 %.

$\boxed{I=[0{,}85\,;0{,}92]}$

La proportion de personnes consommant régulièrement des glaces dans la population en 2000 était de 0,84 % or **0,84 n'appartient pas à I**.

Donc **on ne peut pas affirmer**, au niveau de confiance 95 %, que le pourcentage de français consommant régulièrement est resté stable entre 2000 et 2010.