Exercice 2 5 points

*Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes. Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse,en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée. Dans les questions **1.** et **2.**, le plan est rapporté au repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$ *.On désigne par* $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels.*

1. Affirmation 1 :

Le point d'affixe $(-1+\mathrm{i})^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.

2. Affirmation 2 :

Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z-\bar{z}+2-4\,\mathrm{i}=0$ admet une solution unique.

3. Affirmation 3 :

$$\ln(\sqrt{\mathrm{e}^7})+\frac{\ln(\mathrm{e}^9)}{\ln(\mathrm{e}^2)}=\frac{\mathrm{e}^{\ln 2+\ln 3}}{\mathrm{e}^{\ln 3-\ln 4}}$$

4. Affirmation 4 :

$$\int_0^{\ln 3}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

5. Affirmation 5 :

L'équation $\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Correction :

1. Affirmation 1 : VRAIE

$(-1+i)^2=1-2i+i^2=-2i$
$(-1+i)^{10}=[(-1+i)^2]^5=(-2i)^5=-32i^5$
or, $i^5=i^4\times i=i$
donc, $\boxed{(-1+i)^{10}=-32i}$ (imaginaire pur) et **son image est située sur l'axe imaginaire**.

2. Affirmation 2 : FAUSSE

$z=x+iy$ x et y sont des nombres réels.
$\bar{z}=x-iy$
$z-\bar{z}=x+iy-(x-iy)=2iy$
$z-\bar{z}+2-4i=0 \Leftrightarrow 2iy+2-4i=0 \Leftrightarrow 2+i(2y-4)=0$
Cette équation **n'admet pas de solution**.

3. Affirmation 3 : VRAIE

$\ln(\sqrt{e^7})=\frac{1}{2}\ln(e^7)=\frac{7}{2}\ln(e)=\frac{7}{2}$
$\frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)}=\frac{9}{2}$
$\ln(\sqrt{e^7})+\frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)}=\frac{7}{2}+\frac{9}{2}=\frac{16}{2}=8$
$e^{\ln 2+\ln 3}=e^{\ln(2\times 3)}=e^{\ln(6)}=6$
$e^{\ln 3-\ln 4}=e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{3}{4}$
$\frac{e^{\ln 2+\ln 3}}{e^{\ln 3\times\ln 4}}=\frac{6}{\frac{3}{4}}=\frac{6\times 4}{3}=8$
L'affirmation est donc vraie.

4. Affirmation 4 : VRAIE

$f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$ $u(x)=e^x+2>0$ et $u'(x)=e^x$
$f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ $F(x)=\ln(u(x))=\ln(e^x+2)$
F est **une primitive** de f sur $\mathbb{R}$.
$\int_0^{\ln 3} f(x)dx=F(\ln 3)-F(0)=\ln(e^{\ln 3}+2)-\ln(e^0+2)=\ln 5-\ln 3=-(\ln 3-\ln 5)=-\ln\frac{3}{5}$

5. Affirmation 5 : FAUSSE

$\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4$
L'ensemble de définition de l'équation est $]1;+\infty[$.

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$\ln(x-1)=\ln 4+\ln(x+2)$
$\ln(x-1)=\ln 4(x+2)$
$x-1=4(x+2)$
$x-1=4x+8$
$3x=-9$
$x=-3$
-3 n'appartient pas à l'intervalle $]1;+\infty[$.
Donc, **l'équation n'admet pas de solution**.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés