Exercice 4 **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité** 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=5-\dfrac{4}{x+2}$.

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0:+\infty[$.
On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On note α la solution. On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera un valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
Sur la figure de l' **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points M_0 , M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .
Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

4. a. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n : $0\leqslant u_n \leqslant n_{n+1} \leqslant\alpha$
où α est le réel défini dans la question 2.

b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par :

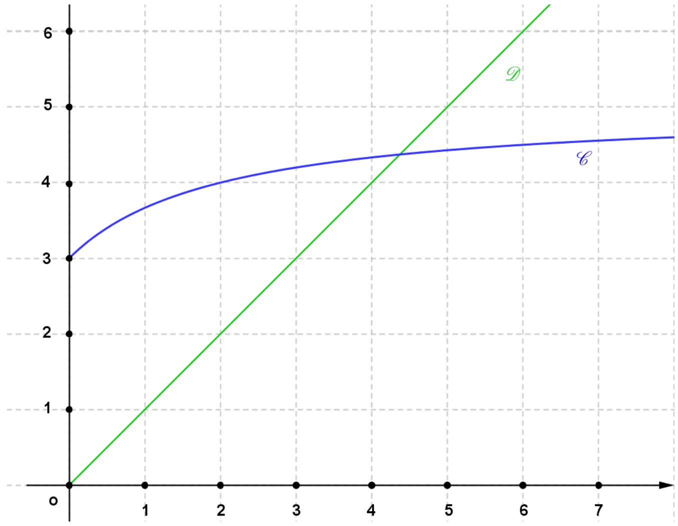
$$S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\ldots+u_n$$

a. Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

b. Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n , pour la valeur de l'entier naturel n demandée à l'utilisateur.

c. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$?

ANNEXE 1 de l'exercice 4 à rendre avec la copie
Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



ANNEXE 2 de l'exercice 4 à rendre avec la copie
Réservé aux Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Entrée : n un entier naturel

Variables : u et s sont des variables réelles
n et i sont des variables entières

Initialisation : u prend la valeur 1
s prend la valeur u
i prend la valeur 0
Demander la valeur de n

Traitement : Tant que …
Affecter à i la valeur i+1
Affecter à u la valeur …
Affecter à s la valeur …
Fin Tant que

Sortie : Afficher s.

Correction :

1. Pour tout nombre réel x appartenant à $[0;+\infty[$

$f'(x)=0+\dfrac{4}{(x+2)^2}>0$

donc, f est **strictement croissante** sur $[0;+\infty[$

2. $f(x)=x \Leftrightarrow (x>0$ et $5-\dfrac{4}{x+2}=x) \Leftrightarrow (x>0$ et $5(x+2)-4=x(x+2)) \Leftrightarrow (x>0$ et $5x+6=x^2+2x) \Leftrightarrow (x>0$ et $x^2-3x-6=0)$

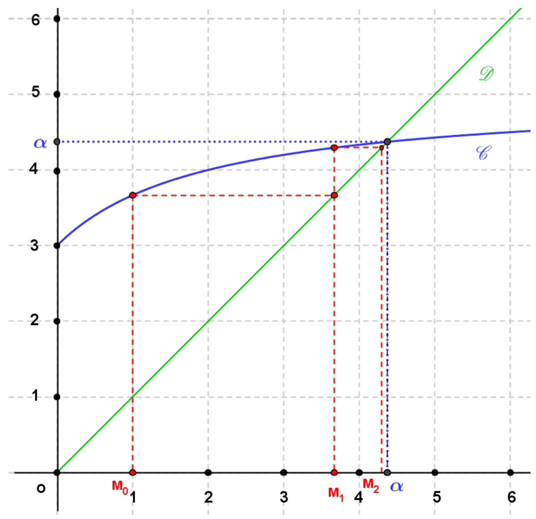
$\Delta=9+4\times 6=33$

$x'=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$ et $x''=\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$

$x''<0$ et $x'>0$ donc l'équation $f(x)=x$ **admet une solution unique** $\boxed{\alpha=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}}$.

En utilisant la calculatrice, on obtient $\alpha\simeq$ **4,37** à 10^{-2} près.

3.



$u_o=1$ $M_0(1;0)$
$u_1=f(u_0)$ $M_1(u_1;0)$
$u_2=f(u_1)$ $M_2(u_2;0)$

Conjectures

(u_n) est **une suite croissante** et **converge vers** α.

4. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$

Initialisation

$u_0=1$, $u_1=f(1)=5-\dfrac{4}{3}=\dfrac{11}{3}$ donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1$

$\alpha-u_1=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}-\dfrac{11}{3}=\dfrac{9+3\sqrt{33}-22}{6}=\dfrac{3\sqrt{33}-13}{6}>0$ (on peut utiliser la calculatrice).

Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que :
$0\leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$, et on doit démontrer que : $0\leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

f est croissante sur $[0;+\infty[$ donc :
si $\quad 0\leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$
alors $\quad f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{+1}) \leqslant f(\alpha)$
Or, $f(0)=3 \geqslant 0$, $f(u_n)=u_{n+1}$, $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et α est solution de l'équation $f(x)=x$ donc $f(\alpha)=\alpha$.

Conséquence
$0\leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

Conclusion
Le **principe de récurrence** nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a :
$0\leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

b. La suite (u_n) est **croissante** et **majorée** par α donc la suite (u_n) est **convergente**.

5. a. $u_0=1$
Donc, $S_0 =$ **1**

$$u_1=f(1)=\frac{11}{3} \simeq 3{,}67$$
Donc, $S_1=1+\frac{11}{3}=\frac{14}{3} \simeq$ **4,67**

$$u_2=f\left(\frac{11}{3}\right)=5-\frac{4}{\frac{11}{3}+2}=5-\frac{4}{\frac{17}{3}}=5-\frac{12}{17}=\frac{73}{17} \simeq 4{,}29$$
Donc, $S_2=\frac{14}{3}+\frac{73}{17}=\frac{14\times 17+3\times 73}{3\times 17}=\frac{238+219}{51}=\frac{457}{51} \simeq$ **8,96**

b.

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant Que **i+1 ⩽ n**
	Affecter à i la valeur i+1
	Affecter à u la valeur ***f*(u)**
	Affecter à s la valeur **s+u**
	Fin Tant Que
Sortie :	Afficher s

c. Pour tout entier naturel n, on a :
$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \quad \ldots \leqslant u_n$
donc, $(n+1)u_0 \leqslant \mathrm{S}_n$
$u_0=1$ donc $(n+1) \leqslant \mathrm{S}_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n = +\infty$
La suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$.