Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que A<B :

```
Entrées :       A et B entiers naturels tels que A < B

Variables :     D est un entier
                Les variables d'entrées A et B

Traitement :    Affecter à D la valeur de  B - A
                Tant Que  D > 0
                    B prend la valeur de A
                    A prend la valeur de D
                    Si  B > A  Alors
                        D prend la valeur de  B – A
                    Sinon
                        D prend la valeur de  A – B
                    Fin Si
                Fin Tant Que

Sortie :        Afficher A
```

1. On entre A=12 et B=14.
En remplissant le tableau donné en **annexe**, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

2. Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B.
En entrant A=221 et B=331, l'algorithme affiche la valeur 1.

a. Justifier qu'il existe des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs solution de l'équation :

(E) $\quad 221x-331y=1$.

b. Vérifier que le couple $(3\,;2)$ est une solution de l'équation (E).
En déduire l'ensemble des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n=2+221n \text{ et } \begin{cases} v_0=3 \\ v_{n+1}=v_n+331 \end{cases}$$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

b. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p\,;q)$ tels que $u_p=v_q$ et $0\leqslant p\leqslant 500$ et $0\leqslant q\leqslant 500$.

ANNEXE de l'exercice 4 à rendre avec la copie
Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

A	B	D
12	14	

Correction :

1. A=12 et B=14

A	B	D
12	14	2
2	12	10
10	2	8
8	10	2
2	8	6
6	2	4
4	6	2
2	4	2
2	2	0

On affiche A=2

2. a. PGCD(221,331)=1 donc les nombres 221 et 331 sont premiers entre eux et le théorème de Bezout nous permet d'affirmer que l'équation (E) $221x-331y=1$ admet des solutions qui sont des couples d'entiers relatifs.

b. $221\times3-331\times2=663-662=1$ donc le couple $(3;2)$ est solution de l'équation (E).
On peut aussi écrire :
(E) $221x-331y=221\times3-331\times2$ soit(E) $221(x-3)=331(y-2)$

221 divise le produit $331(y-2)$ et 221 est premier avec 331
donc le théorème de Gauss nous permet d'affirmer qu'il existe un entier relatif k tel que $y-2=221k$.

On a $221(x-3)=331\times221k$ soit $x-3=331k$.
On obtient $\boxed{x=331k+3}$ et $\boxed{y=221k+2}$

Vérification
Pour tout entier relatif k, on a :
$221x-331y=221\times(331k+3)-331\times(221k+2)=221\times3-331\times2=1$

Conclusion
L'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est l'ensemble des couples $\boxed{(331k+3;221k+2)}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

3. a. La suite (v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0=3$ et de raison $r=331$
Donc, pour tout entier naturel n, $\boxed{v_n=3+331n}$.

b. p et q sont deux entiers naturels $u_p=2+221p$ et $v_q=3+331q$
$u_p=v_q \Leftrightarrow 2+221p=3+331q \Leftrightarrow 221p-331q=1$
Donc, $(p;q)$ est une solution de l'équation (E)
$\begin{cases} p=331k+3 \\ q=221k+2 \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

On veut :
$0 \leqslant p \leqslant 500$ donc $k=\underline{0}$ ou $k=\underline{1}$

On veut aussi :
$0 \leqslant q \leqslant 500$ donc $k=\underline{0}$ ou $k=\underline{1}$ ou $k=\underline{2}$

<u>Conclusion</u>
Il y a deux couples solutions
. pour $\underline{k=0}$ $(p;q)=(3;2)$
$\boxed{u_3=2+221\times 3=665}$
$\boxed{v_2=3+331\times 2=665}$

. pour $\underline{k=1}$ $(p;q)=(334;223)$
$\boxed{u_{334}=2+221\times 334=73816}$
$\boxed{v_{223}=3+331\times 223=73816}$