Exercice 2 — 6 points

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$

1 . Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2 . Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0;+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y=x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=f(u_n)$.

1 . Placer sur le graphique donné en **annexe,** en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ , les points A_0 , A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0 , u_1 , u_2 . Laisser les tracés explicatifs apparents.

2 . Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n>0$.

3 . Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4 .a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\,\mathrm{e}^{-x}=x$. Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

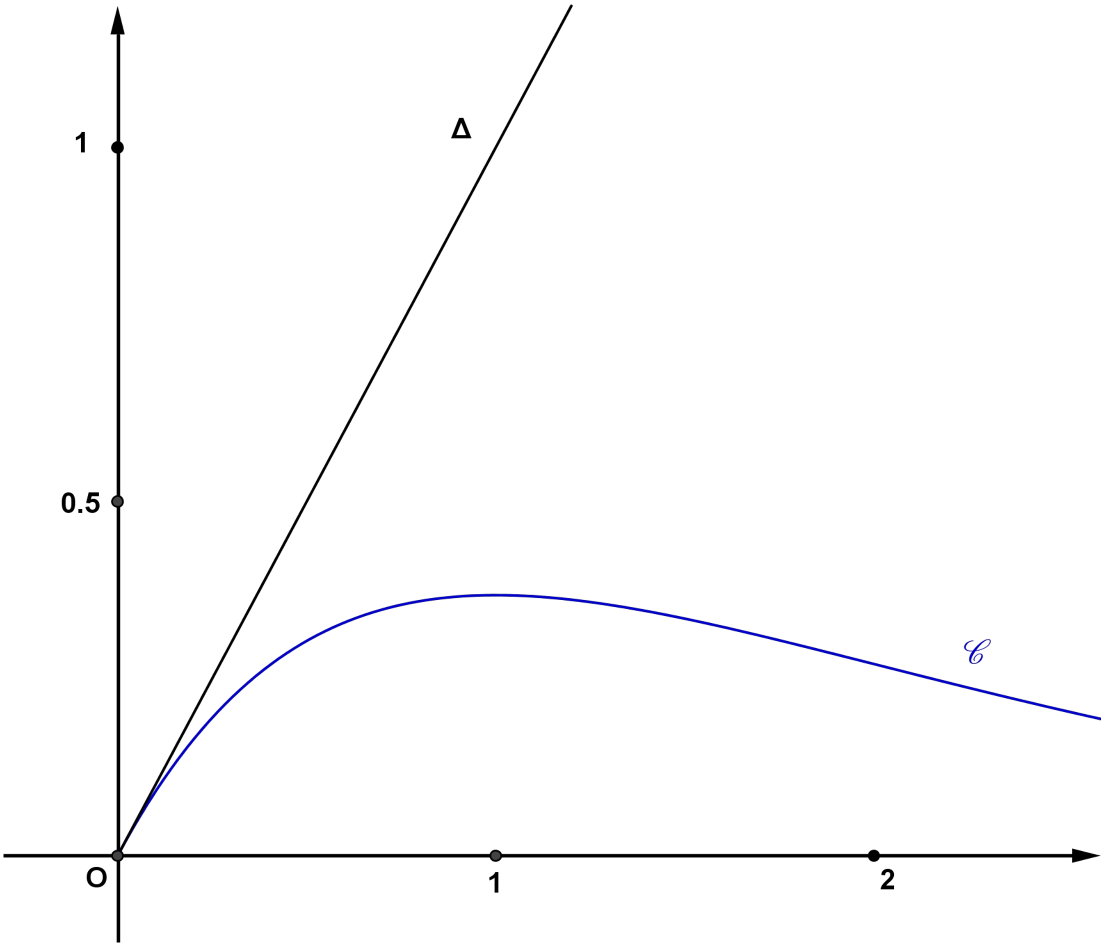
Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par : $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin de calculer S_{100} .

ANNEXE de l'exercice 2
(à rendre avec la copie)

Partie B Question 1



Partie C

Déclaration des variables :
S et u sont des nombres réels
k est un nombre entier
Initialisation :
u prend la valeur …..
S prend la valeur …..
Traitement :
Pour k variant de 1 à …..
u prend la valeur $u \times \mathrm{e}^{-u}$
S prend la valeur …..
Fin Pour
Afficher …..

Correction :
Partie A

1 . $f(x)=x\times\frac{1}{e^x}=\frac{x}{e^x}$

Le cours nous donne : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$.

Conséquence :
$\lim_{x\to+\infty}x\,e^{-x}=0$

2 . f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

On a $(e^u)'=u'e^u$ et $(e^{-x})'=-e^{-x}$

Donc, $\boxed{f'(x)=e^{-x}-x\,e^{-x}=(1-x)e^{-x}}$

Le signe de $f'(x)$ est **le signe** de (1-*x*)

Tableau de variations de *f*

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

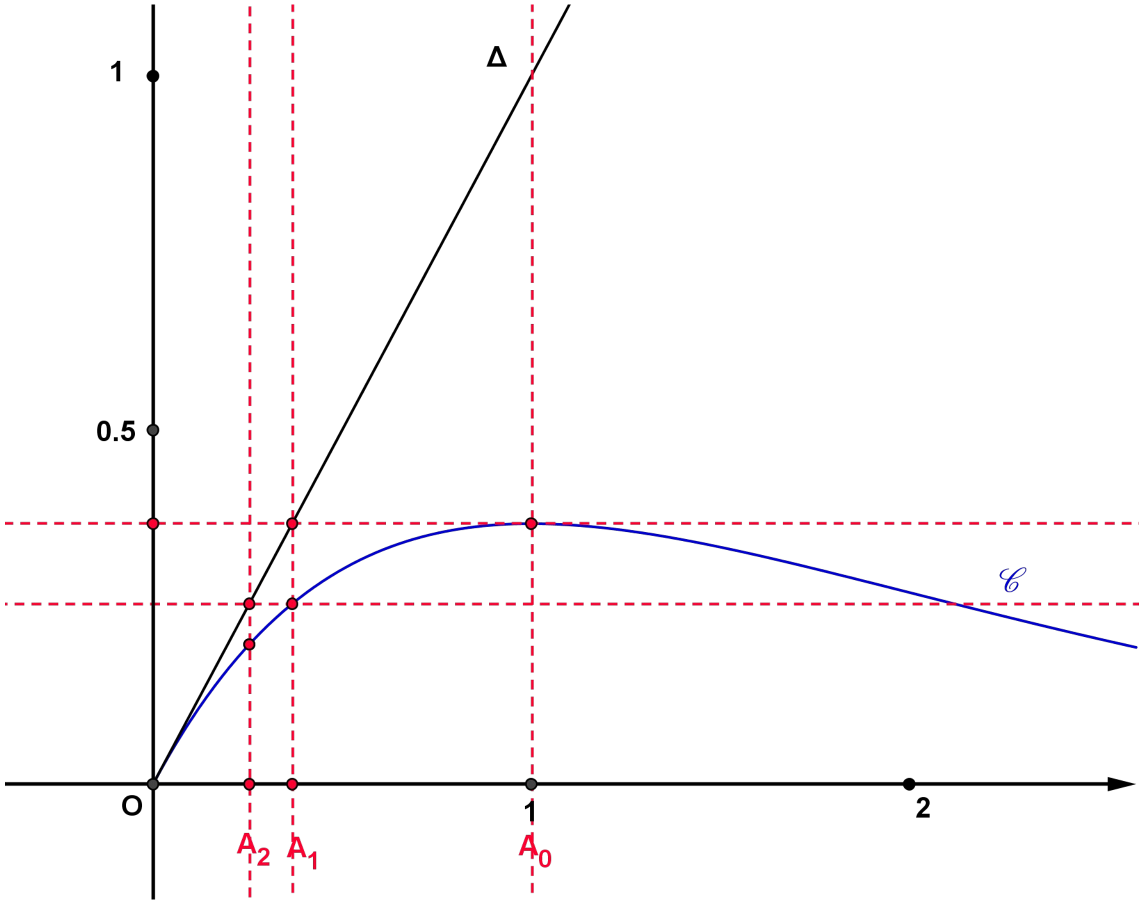
$f(0)=0$ et $f(1)=1\times e^{-1}=\frac{1}{e}$

Partie B

1 . $u_0=1$
$A_0(u_0;0)$

$f(u_0)=u_1$
u_1 est **l'ordonnée** du point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse u_0 .
u_1 est **l'abscisse** du point de Δ d'ordonnée u_1 , c'est à dire l'abscisse du point d'intersection de Δ et de la droite d'équation $y=u_1$
$\boxed{A_1(u_1;0)}$

De même pour u_2 et $\boxed{A_2(u_2;0)}$.



2 . On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.

. **Initialisation :**

$u_0 = 1 > 0$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

. **Hérédité :**

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $u_n > 0$ et on doit démontrer que $u_{n+1} > 0$.

Or, $u_{n+1} = f(u_n)$

Le tableau de variations de f nous permet d'affirmer que si $0 < x$ alors $0 < f(x)$

conséquence : $u_{n+1} > 0$

. **Conclusion :**

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour entier naturel n , on a $u_n > 0$.

3 . Pour tout entier naturel n

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1)$

On a $u_n > 0$ donc $-u_n < 0$

La **fonction exponentielle** est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{-u_n} < e^0 = 1$ et $e^{-u_n} - 1 < 0$

Conséquence :

Pour tout entier naturel n , on a $u_n(e^{-u_n} - 1) < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

4 .a. (u_n) est une suite décroissante minorée par 0 donc (u_n) est convergente.

b. $x\,\mathrm{e}^{-x}=x \Leftrightarrow x(\mathrm{e}^{-x}-1)=0 \Leftrightarrow$ (x=0 ou $\mathrm{e}^{-x}=1$)
or $\mathrm{e}^{-x}=1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow -x=0 \Leftrightarrow x=0$
Conclusion :
L'unique solution de l'équation $x\,\mathrm{e}^{-x}=x$ est 0.
Conséquence :
(u_n) converge vers 0.

Partie C

Déclaration des variables :
S et u sont des nombres réels
u est un entier naturel
Initialisation :
u prend la valeur 1
S prend la valeur 1
Traitement :
Pour k variant de 1 à 100
u prend la valeur $u\times\mathrm{e}^{-u}$
S prend la valeur S+u
Fin Pour
Afficher S