Exercice 3 — 3 points

On considère l'équation (E_1) :

$e^x - x^n = 0$

où x est un réel strictement positif et n est un entier naturel non nul.

1 . Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0$

2 . Pour quelles valeurs de n l'équation (E_2) admet-elle deux solutions ?

Correction :

1 . (E_1) : $e^x - x^n = 0 \Leftrightarrow e^x = x^n$

x est un nombre réel strictement positif et n est un entier naturel non nul donc $x^n > 0$, en utilisant les propriétés de la fonction ln :

$(E_1) \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(x^n) \Leftrightarrow x = n\ln(x) \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) - \frac{x}{n} = 0$

donc $(E_1) \Leftrightarrow (E_2)$

L'équation (E_1) est **équivalente** à l'équation (E_2) .

2 . Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f_n(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$

f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$f'_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n}$ car $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$f'_n(x) = \frac{n-x}{nx}$

Le **signe** de $f'_n(x)$ est le signe de $n-x$.

$x>0$ $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'_n(x) = -\infty$

$f_n(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - n\right)$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} - n\right) = -n < 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$

Tableau de variations

x	0		n		$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	+	0	−	
$f_n(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\ln(n)-1$	↘	$-\infty$

On a ln(e)=**1** et e $\simeq$ **2,72**

. Si $1 \leqslant n \leqslant 2$ alors $\ln(n) < 1$ et $f_n(n) < 0$

Conséquence

Pour tout nombre réel x appartient à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f_n(x) < 0$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ **n'admet pas de solution**.

. Si $3 \leqslant n$ alors $1 < \ln(n)$ et $f_n(n) > 0$

f_n est **continue** et s**trictement croissante** sur $]0;n[$ à valeurs dans $]-\infty; f_n(n)[$. 0 appartient à l'intervalle $]-\infty; f_n(n)[$ donc **le théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que l'équation $f_n(x)=0$ admet **une unique solution** α_n appartenant à l'intervalle $]0;n[$.

f_n est **continue** et **strictement décroissante** sur $]n;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty; f_n(n)[$. 0 appartient à l'intervalle $]-\infty; f_n(n)[$ donc l'équation $f_n(x)=0$ admet aussi **une unique solution** β_n appartenant à $]n;+\infty[$.

Conclusion
L'équation (E_1) admet **deux solutions** si et seulement si n est un entier supérieur ou égal à 3.