Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité — 5 points

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe. Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.
On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z)=z^2+2z+9$.

1 . Calculer l'image de $-1+i\sqrt{3}$ par la fonction f.

2 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=5$.
Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation. Construire alors sur un graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

3 . Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4 . Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z)-8|=3$.
Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Tracer (F) sur le graphique.

5 . Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+\mathrm{i}\,y$ où x et y sont des nombres réels.
a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est $x^2-y^2+2x+9+\mathrm{i}(2xy+2y)$.

b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6 . Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Correction :

1 . $f(z)=z^2+2z+9$
$f(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})=(-1+i\sqrt{3})^2+2(-1+i\sqrt{3})+9=1-2\mathrm{i}\sqrt{3}-3-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}+9=5$
$f(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})$ = **5**

2 . $f(z)=5 \Leftrightarrow z^2+2z+9=5 \Leftrightarrow z^2+2z+4=0$
$\Delta=2^2-4\times 4\times 1=-12 <0$
L'équation admet **deux solutions complexes conjuguées**.

$-12=4\times 3\times \mathrm{i}^2=(2\mathrm{i}\sqrt{3})^2$
$\boxed{z_1=\frac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$ et $\boxed{z_2=\frac{-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$
$|z_1|^2=|z_2|^2=1+3=4$
$|z_1|$ = **2**

$z_1=2\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\cos(\theta_1)=-\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta_1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc, $\theta_1=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$
$z_1=\boxed{e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$; $z_2=\bar{z}_1=\boxed{e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$
La partie imaginaire de z_1 est **positive**: $\boxed{A(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})}$ $\boxed{B(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})}$

OA=OB=2 donc A et B **appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2**.
A et B **appartiennent aussi à la droite** d'équation $x=-1$.
Les **points d'intersection** du cercle et de la droite sont **A et B**.

3 . λ est un nombre réel.
$f(z)=\lambda \Leftrightarrow z^2+2z+1=\lambda \Leftrightarrow z^2+2z+9-\lambda=0$
$\Delta=4-4(9-\lambda)=-32+4\lambda$
L'équation **admet deux solutions complexes conjuguées** si et seulement si : $\Delta<0$, c'est à dire $-32+4\lambda<0$
$\Leftrightarrow 4\lambda<32 \Leftrightarrow \lambda<8$
L'ensemble cherché est l'intervalle $\boxed{]-\infty;8[}$.

4 . $f(z)-8=z^2+2z+1=(z+1)^2$
$|f(z)-8|=|(z+1)^2|=|z+1|^2$

$|f(z)-8|=3 \Leftrightarrow |z+1|^2=3 \Leftrightarrow |z+1|=\sqrt{3}$

M(z) Ω (-1) $\vec{\Omega M}$ (z+1) $\Omega M=|z+1|$ = |
$|f(z)-8|=\Omega M=\sqrt{3}$
Donc, M **appartient au cercle** de **centre** Ω et de **rayon** $\sqrt{3}$.
(F) est **le cercle** de **centre** Ω et de **rayon** $\sqrt{3}$.

5 .a. $f(x+\mathrm{i}\,y)=(x+\mathrm{i}\,y)^2+2(x+\mathrm{i}\,y)+9=x^2+2\,\mathrm{i}\,xy-y^2+2\,x+2\,\mathrm{i}\,y+9=x^2-y^2+2\,x+9+\mathrm{i}(2\,xy+2\,y)$

$\boxed{f(z)=x^2-y^2+2\,x+9+\mathrm{i}(2\,xy+2\,y)}$

b. $f(z)$ est un nombre réel si et seulement si $\boxed{2\,xy+2\,y=0}$

$2\,xy+2\,y=0 \;\Leftrightarrow\; 2\,y(x+1)=0 \;\Leftrightarrow\;$ (y=0 ou x=-1)

donc (E) est la réunion des droites D_1 (d'équation y=0) et D_2 (d'équation x=-1).

c. Intersection de (F) et D_1

(F) : $(x+1)^2+y^2=3$ et D_1 : y=0

$(x+1)^2-3=0 \;\Leftrightarrow\;$ ($x+1+\sqrt{3}=0$ ou $x+1-\sqrt{3}=0$)

$\boxed{I_1(-1+\sqrt{3}+0\,\mathrm{i})}$ $\boxed{J_1(-1-\sqrt{3}+0\,\mathrm{i})}$

Intersection de (F) et D_2

(F) : $(x+1)^2+y^2=3$ et D_2 : x=-1

$y^2=3 \;\Leftrightarrow\;$ (y= $\sqrt{3}$ ou y= $-\sqrt{3}$)

$\boxed{A(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})}$ $\boxed{B(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})}$

Conclusion :

Il y a quatre points d'intersection entre (F) et (E) : I_1 ; J_1 ; A ; B.