Exercice 4 — Candidats ayant suivi la spécialité — 5 points

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y. D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus,chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1er janvier de l'année 2014+n, exprimées en millions d'euros.

On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que le 1er janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.

L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$U_{n+1}=A\,u_n+B$ où $A=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1 . Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B.

2 . Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015 exprimées en millions d'euros.

3 . On note $D=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}375 \\ 0{,}25 & 0{,}125 \end{pmatrix}$.

a. Donner sans détailler le calcul, la matrice PDQ.

b. Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit QP. Dans la suite, on admettra que QP = I.

On admettra dans la suite de l'exercice que pour tout entier naturel non nul n, $A^n=PD^nQ$

4 . On pose pour tout entier naturel n,

$V_n=U_n-\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1}=AV_n$

b. Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n, donner l'expression de V_n en fonction de A, n et V_0.

5 . Soit n entier naturel. On admet que :

$$A^n=\begin{pmatrix} 0{,}25\times 0{,}3^n+0{,}75\times 0{,}7^n & 0{,}375(-0{,}3^n+0{,}7^n) \\ 0{,}5(-0{,}3^n+0{,}7^n) & 0{,}75\times 0{,}3^n+0{,}25\times 0{,}7^n \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.

b. En déduite l'expression de x_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.

Correction :

Remarque préliminaire

Une agence bancaire dans une ville gèrent les dossiers de ses clients, gestion des comptes (non étudiée dans l'exercice), placements des clients (non étudiés dans l'exercice et les prêts des clients).
La banque met à la disposition de ses agences, un capital que l'on appelle fonds pour les clients (exemples : prêts personnels, prêts automobile, prêts travaux, prêts immobiliers, prêts aux artisans, prêts aux entreprises).
Il est possible d'imaginer que pour un prêt important pour l'agence X, l'agence Y participe et réciproquement.
Les remboursements des prêts reconstituent une partie des fonds initiaux. Mais chaque année une partie des fonds initiaux reste immobilisée (pour les prêts immobiliers le délai de remboursement peut être de 20 ans ou 25 ans).

1 . Pour tout entier naturel n

$U_{n+1}=AU_n+B$

$$\begin{cases} x_{n+1}=0,6\,x_n+0,15\,y_n+1 \\ y_{n+1}=0,2\,x_n+0,4\,y_n+3 \end{cases}$$

. $0,6\,x_n$ **correspond à 60 %** de x_n

60 % de la quantité de fonds de l'agence X de l'année $2014+n$ fait partie de la quantité de fonds de l'agence X de l'année $2014+n+1$.

Remarque

20 % de la quantité de fonds de l'agence X de l'année $2014+n$ fait partie de la quantité de fonds de l'agence Y pour l'année $2014+n+1$.
Donc 20 % de la quantité de fonds de l'agence X de l'année $2014+n$ n'est plus disponible pour l'année $2014+n+1$.

. Le coefficient 3 de la matrice B est **le montant en millions d'euros**, **transféré à l'agence Y**, par la banque, pour l'année $2014+n+1$.

2 . $x_0=50$ et $y_0=10$ $\qquad U_0=\begin{pmatrix}50\\10\end{pmatrix}$

$$U_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6 & 0,15\\0,2 & 0,4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1=0,6\times 50+0,15\times 10+1=32,5 \\ y_1=0,2\times 50+0,4\times 10+3=17 \end{cases}$$

La quantité de fonds dont dispose **l'agence X** pour l'année 2015 est : **32,5 millions d'euros**.
La quantité de fonds dont dispose **l'agence Y** pour l'année 2015 est : **17 millions d'euros**.

3 .a. On peut utiliser la calculatrice. (Les détails des calculs ne sont demandés).

$$PD=\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,3 & 0\\0 & 0,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 0,3+3\times 0 & 1\times 0+3\times 0,7\\-2\times 0,3+2\times 0 & -2\times 0+2\times 0,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,3 & 2,1\\-0,6 & 1,4\end{pmatrix}$$

$$PDQ=\begin{pmatrix}0,3 & 2,1\\-0,6 & 1,4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,25 & -0,375\\0,25 & 0,125\end{pmatrix}$$

$$PDQ=\begin{pmatrix}0,3\times 0,25+2,1\times 0,25 & -0,3\times 0,375+2,1\times 0,125\\-0,6\times 0,25+1,4\times 0,25 & 0,6\times 0,375+1,4\times 0,125\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6 & 0,15\\0,2 & 0,4\end{pmatrix}$$

PDQ=A

b. $QP=\begin{pmatrix}0{,}25 & -0{,}375\\ 0{,}25 & 0{,}125\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

$$QP=\begin{pmatrix}0{,}25\times 1+0{,}375\times 2 & 0{,}25\times 3-0{,}375\times 2\\ 0{,}25+1-0{,}125\times 2 & 0{,}25\times 3+0{,}125\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

(On demande que de calculer la première ligne).

4 . a.

$$V_{n+1}=U_{n+1}-\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}=A\,U_n+\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}$$

$$V_{n+1}=A\left(V_n+\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}$$

$$V_{n+1}=A\,V_n+A\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}$$

Or,

$$A\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}6\times 5+0{,}15\times\frac{20}{3}\\ 0{,}2\times 5+0{,}4\times\frac{20}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+\frac{3}{3}\\ 1+\frac{8}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ \frac{11}{3}\end{pmatrix}$$

Donc,

$$V_{n+1}=A\,V_n+\begin{pmatrix}4\\ \frac{11}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{V_{n+1}=A\,V_n}$$

b. On peut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que :

$$\boxed{V_n=A^n V_0}$$

$$V_0=U_0-\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\ 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{V_0=\begin{pmatrix}45\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix}}$$

5 .a. Le coefficient de la première ligne de la matrice V_n est :

$$(0{,}25\times 0{,}3^n+0{,}75\times 0{,}7^n)\times 45+0{,}375(-0{,}3^n+0{,}7^n)\times\frac{10}{3}$$

$$=\ 0{,}3^n\left(0{,}25\times 45-0{,}375\times\frac{10}{3}\right)+0{,}7^n\left(0{,}75\times 45+0{,}375\times\frac{10}{3}\right)$$

$$=\boxed{0{,}3^n(11{,}25-1{,}25)+0{,}7^n(33{,}75+1{,}25)=10\times 0{,}3^n+35\times 0{,}7^n}$$

b. x_n -5= $10\times 0,3^n + 35\times 0,7^n$

$x_n = 10\times 0,3^n + 35\times 0,7^n + 5$

$0 \leqslant 0,3 \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3^n = \underline{0}$

$0 \leqslant 0,7 \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = \underline{0}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \underline{5}$

Dans un avenir lointain la quantité de fonds (disponible) de l'agence X sera **voisine de 5 millions d'euros**.