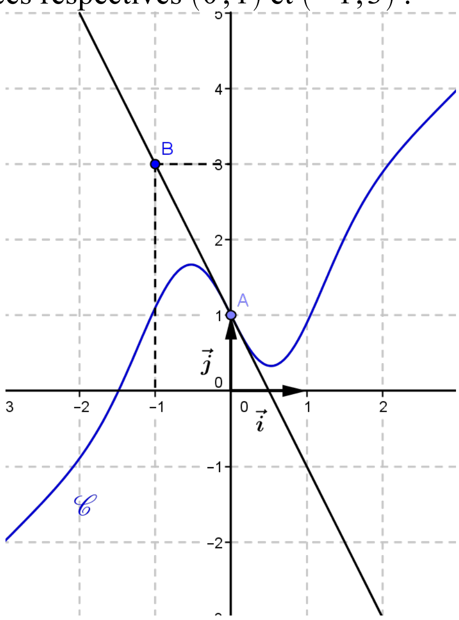
Exercice 1 5 points

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, une courbe $\mathscr{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0;1)$ et $(-1;3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$. On suppose , de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x , $f(x)=x+1+ax\,\mathrm{e}^{-x^2}$

1 .a. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.
b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
c. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x)=1-a(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2}$
d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A. Déterminer la valeur du réel a .

2 . D'après la question précédente, pour tout réel x , $f(x)=x+1-3x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $f'(x)=1+3(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2}$

a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle]-1 ; 0], $f(x)>0$.

b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x)>0$.

c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[\frac{-3}{2};-1\right]$ tel que $f(c)=0$.

Justifier que $c<-\frac{3}{2}+2\times10^{-2}$.

3 . On désigne par $\mathscr{A}$, l'aire exprimée en unités d'aire, du domaine défini par : $c\leqslant x\leqslant 0$ et $0\leqslant y\leqslant f(x)$

a. Écrire $\mathscr{A}$ sous la forme d'une intégrale.

b. On admet que l'intégrale I= $\int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 10^{-3} près. Calculer la valeur exacte de I.

Correction :

1 .a. $A(0:1)$ $f(0)=0+1+0=1$
Donc, la courbe $\mathscr{C}$ passe par A.

b. $A(0;1)$ $B(-1;3)$

Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-3-1}{-1-0}=-2$

$m=-2$

c. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^{-x^2})'=-2x e^{-x^2}$
donc, pour tout nombre réel x :
$f'(x)=1+a e^{-x^2}+ax(-2xe^{-x^2})=1+ae^{-x^2}-2ax^2e^{-x^2}$
$\boxed{f'(x)=1-a(2x^2-1)e^{-x^2}}$

d. (AB) est tangente en A à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\boxed{f'(0)=-2}$.
Or, $f'(0)=1+a$
$f'(0)=-2 \Leftrightarrow 1+a=-2 \Leftrightarrow a=-3$
Conclusion :
Pour tout nombre réel x :
$\boxed{f(x)=x+1-3xe^{-x^2}}$ et $\boxed{f'(x)=1+3(2x^2-1)e^{-x^2}}$

2 .a. Si $-1<x\leqslant 0$ alors $3>-3x\geqslant 0$
or, pour tout nombre réel x : $e^{-x^2}>0$
Donc, $-3xe^{-x^2}\geqslant 0$
Si $-1<x\leqslant 0$ alors $0<x+1\leqslant 1$
Conséquence :
Si $x\in]-1;0]$ alors $\boxed{f(x)=x+1-3xe^{-x^2}>0}$

b. Si $x\leqslant -1$ alors $x^2\geqslant 1$ (la fonction carré est décroissante sur]–∞;0])
et $2x^2$ -1$\geqslant 1$ donc $3(2x^2-1)e^{-x^2}>0$
Conséquence :
Si $x\in]-\infty;-1]$ alors $\boxed{f'(x)=1+3(2x^2-1)e^{-x^2}>0}$

c. Pour tout nombre réel x appartenant à $\left[-\dfrac{3}{2};-1\right]$ on a $f'(x)>0$ donc f est continue et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2};-1\right]$.

$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{2}e^{-\frac{9}{4}}=-0{,}5+4{,}5e^{-2{,}25}$. En utilisant la calculatrice : $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)\simeq -0{,}026$ donc $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)<0$

$f(-1)=1+3e^{-1}=1+\dfrac{3}{e}\simeq 2{,}104$ donc $f(-1)>0$

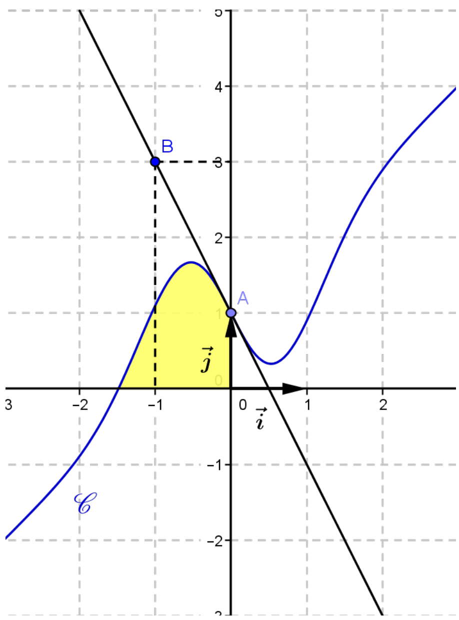
On a $0\in\left[f\left(-\dfrac{3}{2}\right);f(-1)\right]$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre réel c

appartenant à $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$ tel que $f(c)=0$.

$-\frac{3}{2}+2\times10^{2}=-1{,}48$
$f(-1{,}48)=-0{,}48+4{,}44\,e^{-1{,}48^2}\simeq 0{,}017>0$
$f(-1{,}5)<0$ et $f(-1{,}48)>0$
Donc, **-1,5<c<-1,48**

3 .a. f est croissante sur $[c;-1]$ (pour tout nombre réel x appartenant à $[c;-1]$, on a $f'(x)>0$) et $f(c)=0$
Donc, si $c\leqslant x\leqslant -1$ alors $f(c)\leqslant f(x)$ soit $0\leqslant f(x)$.
Nous avons vu dans la question **2 .a.** que si $-1<x\leqslant 0$ alors $0\leqslant f(x)$
Conséquence :
f est **positive ou nulle** sur $[c;0]$.
f est **continue** et **positive** sur $[c;0]$ donc l'aire $\mathscr{A}$ en U.A. du domaine plan défini par $c\leqslant x\leqslant 0$ et $0\leqslant y\leqslant f(x)$ est : $\mathscr{A}=\int_c^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.



b. I$=\int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad f(x)=x+1-3x\,e^{-x^2}$

Rappels
Pour tout nombre réel x
$g(x)=e^{-x^2}$ $\qquad g'(x)=-2x\,e^{-x^2}$

$h(x)=-3x\,e^{-x^2}$ $\qquad \mathrm{H}(x)=\frac{3}{2}e^{-x^2}$
H est **une primitive** de h sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{F}(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}e^{-x^2}$
F est **une primitive** de f sur $\mathbb{R}$

$$I = F(0) - F\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}\right)$$

$$I = \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}$$

$$\boxed{I = \frac{15}{8} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}}$$

Remarque

$I \simeq 1,717$

