Exercice 2 — 6 points

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1 . Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients. On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

a. Déterminer la valeur de λ

b. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table? On arrondira à 10^{-4} .

c. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4} .

2 . Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à 0,8.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé dont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

a. Préciser,en fonction de n, les paramètres de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique E(Y) et son écart type $\sigma(Y)$.

b. Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ de moyenne $\mu=64{,}8$ et d'écart type $\sigma=3{,}6$.

Calculer la probabilité p_1 de l'événement $\{Z \leqslant 71\}$ à l'aide de la calculatrice.

c. On admet que lorsque $n=81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P(Y \leqslant 70)$ de l'événement $\{Y \leqslant 70\}$.

Le restaurant a reçu 81 réservations. Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

Correction :

1 .a. Le temps moyen d'attente (en minutes) pour obtenir une table est égal à E(X).

Donc, $\frac{1}{\lambda}=10$ et $\boxed{\lambda=\frac{1}{10}=0,1}$

b. X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ=0,1 donc la densité de X est la fonction f définie sur [0;+∞[par $f(t)=0,1\mathrm{e}^{-0,1t}$ et $P(10\leqslant X\leqslant 20)=\int_{10}^{20} f(t)\,dt$.

La fonction F définie sur [0;+∞[par $F(t)=-\mathrm{e}^{-0,1t}$ est **une primitive** de f sur [0;+∞[.

$P(10\leqslant X\leqslant 20)=-\mathrm{e}^{-0,1\times 20}+\mathrm{e}^{-0,1\times 10}=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}\approx$ **0,2325**

c. On nous demande de calculer : $P_{(10\leqslant X)}(15\leqslant X)$

$P_{(10\leqslant X)}(15\leqslant X)=\frac{P(15\leqslant X)}{P(10\leqslant X)}$

$P(15\leqslant X)=1-P(0\leqslant X\leqslant 15)=1-\int_{0}^{15} f(t)\,dt=\mathrm{e}^{-1,5}$

$P(10\leqslant X)=\mathrm{e}^{-1}$

$P_{(10\leqslant X)}(15\leqslant X)=\frac{\mathrm{e}^{-1,5}}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^{-0,5}\simeq$ **0,6065**

Remarque :

La loi exponentielle de paramètre λ=0,1 est **une loi de durée de vie sans vieillissement** c'est à dire si t et r sont des nombres réels positifs : $P_{(t\leqslant X)}(t+r\leqslant X)=P(r\leqslant X)$ (indépendant de t).

2 .a. On considère **l'épreuve de Bernoulli** suivante :

On choisit au hasard une personne parmi les n personnes ayant réservé.

Succès S : « cette personne se présente au restaurant »

La probabilité de succès est p=**0,8**.

Échec $\bar{S}$: « cette personne ne se présente pas au restaurant »

La probabilité de l'échec est q=1–0,8=**0,2**.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. Donc, on effectue n épreuves indépendantes et Y est la variable aléatoire égale au nombre de succès en n épreuves.

La loi de probabilité de Y est **la loi binomiale** de paramètres : ***n* et *p*=0,8**.

On sait que **E(Y)=*np*=0,8*n*** et **V(Y)=npq**= $n\times 0,8\times 0,2$ =**0,16*n***

σ(Y)= $\sqrt{0,16n}=\boxed{0,4\sqrt{n}}$

b. Z est la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ avec μ=64,8 et σ=3,6

p_1=P(Z⩽71)

En utilisant la calculatrice on obtient : $p_1\simeq$ **0,9575**

c. Remarque :

$n=81$

E(Y)= $n\times 0,8=81\times 0,8$ =**64,8**=μ

σ(Y)= $0,4\sqrt{n}=0,4\times 9$ =**0,36**=σ

On a P(Y⩽70) ≃ **0,9575**

La probabilité que le restaurant ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé est :

$P(70<Y)=P(71\leqslant Y)$

$P(70<Y)=1-P(Y\leqslant 70)$

$P(70<Y)\simeq 1-0{,}9575$

$P(70<Y)\simeq \underline{\mathbf{0{,}0425}}$.