Exercice 3 — 4 points

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps. Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1 . On effectue à l'instant 0 une injection de 10 ml de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n on note u_n la quantité de médicament, en ml, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0=10$.

a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b. Pour tout entier naturel n , donner l'expression de u_n en fonction de n .

c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2 . Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 ml, de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 ml, la machine réinjecte 4 ml de produit. Au bout de 15 minutes on arrête la machine.
Pour tout entier naturel n , on note v_n la quantité de médicament, en ml, restant dans le sang à la minute n .
L'algorithme suivant donne la quantité de médicament minute par minute.

```
Variables :        n est un entier naturel
                   v est un nombre réel
Initialisation :   Affecter à v la valeur 10
Traitement :       Pour n allant de 1 à 15
                       Affecter à v la valeur 0,8×v
                       Si v < 5 lors affecter à v la valeur v+4
                       Afficher v
                   Fin boucle
```

a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondis à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6.4					8.15	6.52	5.21	8.17	6.54	5.23	8.18	6.55	5.24

b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injecté dans l'organisme ?

c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 ml, de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 ml et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.
Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en ml restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3 . On programme la machine de façon que :
. à l'instant 0, elle injecte 10 ml de médicament
. toutes les minutes, elle injecte 1 ml de médicament.
On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n , on

note w_n la quantité de médicament, en ml, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a. Justifier que pour tout entier naturel n , $w_{n+1}=0{,}8\,w_n+1$.

b. Pour tout entier naturel n , on pose $z_n=w_n-5$
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n .

d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

Correction :

1 .a. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute donc pour tout entier naturel n on a :

$u_{n+1}=u_n-\frac{20}{100}u_n=0{,}8\,u_n$

(u_n) est **une suite géométrique** de raison **0,8**.

b. $u_0=10$ et pour tout entier naturel n :

$\boxed{u_n=u_0\times q^n=10\times 0{,}8^n}$

c. 1 % de la quantité initiale $u_0=10$ est égale $\frac{10}{100}=0{,}1$(ml).

On doit déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $u_n<0{,}1$ soit $10\times 0{,}8^n<0{,}1$

Soit, $0{,}8^n<\frac{0{,}1}{10}=0{,}01$.

ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\ln(0{,}8^n)<\ln(0{,}01) \Leftrightarrow n\ln(0{,}8)<\ln(0{,}01)$

Or, $0<0{,}8<1$ donc $\ln(0{,}8)<0$

Et, donc, $n>\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$

En utilisant la calculatrice on obtient $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}\simeq$ **20,6** donc le plus petit entier naturel tel que $0{,}8^n<0{,}01$ est **n=21**.

Au bout de 21 minutes, la quantité de médicament restant dans le sang du patient est inférieure à 0,1 ml.

2 .a. $n=3$ $\quad v=0{,}8\times 6{,}4=5{,}12>5$ donc $v_3=$**5,12**

$n=4$ $\quad v=0{,}8\times 5{,}12=4{,}096<5$ donc $v+4=8{,}096$. On arrondit à 10^{-2} , donc $v_4=$**8,10**

$n=5$ $\quad v=0{,}8\times 8{,}096=6{,}4768>5$. On arrondit à 10^{-2} , donc $v_5=$**6,48**

$n=6$ $\quad v=0{,}8\times 6{,}4768=5{,}18144>5$. On arrondit à 10^{-2} , donc $v_6=$**5,18**

Remarque

$n=7$ $\quad v=0{,}8\times 5{,}18144=4{,}145152<5$ donc $v+4=8{,}145152$. On arrondit à 10^{-2} , donc $v_7=$**8,15**

On complète le tableau donné dans l'énoncé :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6.4	5.12	8.10	6.48	5.18	8.15	6.52	5.21	8.17	6.54	5.23	8.18	6.55	5.24

b. A l'instant 0 : on injecte 10 ml

En regardant le tableau précédent :

au bout de 4 min : on injecte **4 ml**

au bout de 7 min : on injecte **4 ml**

au bout de 10 min : on injecte **4 ml**

au bout de 13 min : on injecte **4 ml**

Conclusion :

au bout de 15 min on a injecté $10+4\times 4=10+16=$**26 ml** dans l'organisme du patient.

c. **Variables :** n est un entier naturel
v est un nombre réel
Initialisation : Affecter à v la valeur 10
Traitement : Pour n allant de 1 à **30**
Affecter à v la valeur $0{,}8\times v$
Si v $\leqslant$ **6** alors Affecter à v la valeur v + **2**
Afficher v
Fin boucle

3 .a. n est un entier naturel
w_n est la quantité de médicament, en ml présente dans le sang du patient au bout de n minutes.
w_{n+1} est la quantité de médicament, en ml présente dans le sang du patient au bout de $(n+1)$ minutes.
20 % du médicament est éliminé entre la $n^{\text{ième}}$ minute et la $(n+1)^{\text{ième}}$ minute, il reste donc :
$w_n - 0{,}2\times w_n = 0{,}8\times w_n$ ml de médicament dans le sang à la $(n+1)^{\text{ième}}$ minute, puis on injecte 1 ml de médicament à la $(n+1)^{\text{ième}}$ minute.
Conclusion :
$\boxed{w_{n+1}=0{,}8\,w_n+1}$

b. Pour tout entier naturel n , on a :
$z_n=w_n-5$ donc $w_n=z_n+5$
et $z_{n+1}=w_{n+1}-5=(0{,}8\,w_n+1)-5=0{,}8\,w_n-4=0{,}8(z_n+5)-4=0{,}8\,z_n$
et $z_0=w_0-5=10-5=5$
(z_n) est **la suite géométrique** de **premier terme** $z_0=5$ et de **raison** $q=0{,}8$.

c. Pour tout entier naturel n
$\boxed{z_n=z_0\times q^n=5\times 0{,}8^n}$ et $\boxed{w_n=z_n+5=5\times 0{,}8^n+5}$

d. $0\leqslant 0{,}8<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n=$ **0**
et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=$ **5**.
Pour n « assez grand », **la quantité de médicament** présente dans le sang du patient **sera voisine de 5 ml**.