Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées : $A(1;-\sqrt{3};0)$; $B(1;\sqrt{3};0)$; $C(-2;0;0)$; $D(0;0;2\sqrt{2})$

1 . Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x+z\sqrt{2}=4$.

2 . On note $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.

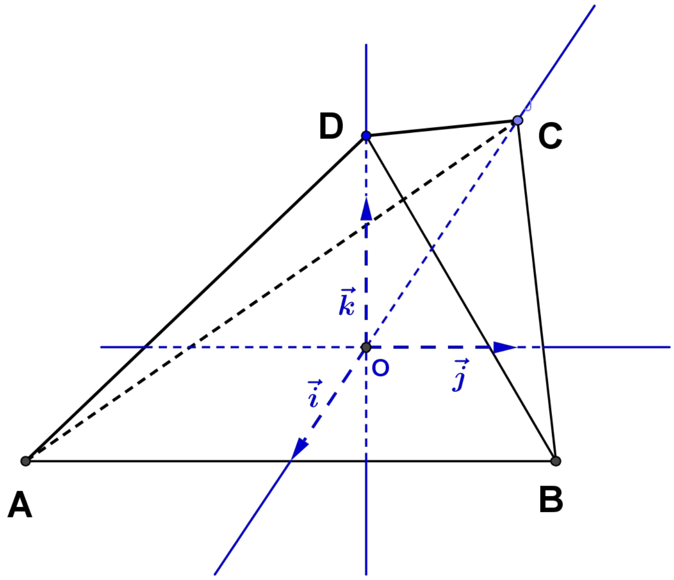
b. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABD).

3 .a. On note L le milieu du segment [AC].
Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

b. Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.

4 . Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est à dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

Correction :
Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé. $A(1;-\sqrt{3};0)$; $B(1;\sqrt{3};0)$; $C(-2;0;0)$; $D(0;0;2\sqrt{2})$
On peut construire la figure suivante :



1 . $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ **ne sont pas colinéaires** donc les trois points A ; B et D **déterminent un plan** (ABD).
$4x+z\sqrt{2}=4$ **est une équation cartésienne** de (ABD) si et seulement si les coordonnées de A et de B et de D sont **solutions de l'équation**.

$A(1;-\sqrt{3};0)$ $\quad 4\times1+\sqrt{2}\times0=4$
$B(1;\sqrt{3};0)$ $\quad 4\times1+\sqrt{2}\times0=4$
$D(0;0;2\sqrt{2})$ $\quad 4\text{x}0+\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$

Donc, $4x+z\sqrt{2}=4$ est **une équation cartésienne** de (ABD).

2 .a. $\mathscr{D}$ est la droite **passant** par $O(0;0;0)$ et de **vecteur directeur** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\0\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de (CD).

Or, $\overrightarrow{CD}=2\vec{u}$
Donc, $\mathscr{D}$ est **la droite parallèle** à (CD) **passant par O**.

b. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et(ABD), on résout le système :

$$\begin{cases}x=t\\y=0\\z=t\sqrt{2}\\4x+z\sqrt{2}=4\end{cases}$$

On obtient :

$$4t+(t\sqrt{2})\sqrt{2}=4 \Leftrightarrow 4t+2t=4 \Leftrightarrow 6t=4 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$$

$x=\frac{2}{3};y=0;z=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{G\left(\frac{2}{3};0;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}$

3 .a. L est le milieu de [AC]

$L\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ $\quad B(1;\sqrt{3};0)$ $\quad \overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{3\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix}$

On obtient pour représentation paramétrique de (BL) :

$$\begin{cases}x=-\frac{3}{2}t'+1\\y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}t'+\sqrt{3}\\z=0t'+0\end{cases}\quad t'\in\mathbb{R}$$

$O(0;0;0)$

On résout le système :

$$\begin{cases}0=-\frac{3}{2}t'+1\\0=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\\0=0t'+0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=\frac{2}{3}\\t'=\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow t'=\frac{2}{3}$$

Donc l'origine appartient à (BL)

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{3\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BL}=-\frac{3}{2}\times(-3)+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt{3}+0\times0=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont orthogonaux donc les droites (AC) et (BL) sont orthogonales.

Remarque :

On peut démontrer géométriquement que O est le centre de gravité du triangle ABC.

b. (BL) est la médiane et aussi la hauteur du triangle ABC, issue de B, donc le triangle ABC est isocèle de sommet principal B et BA = BC.

On peut aussi démontrer rapidement que (CI) est la médiane et aussi la hauteur du triangle ABC, issue de C donc CA=CB.

Conclusion :

CA=CB=BA et le triangle ABC est équilatéral et le centre du cercle circonscrit à ABC est le point d'intersection de (BL) et (CI), soit le point O.

4 . Pour démontrer que le tétraèdre est régulier, il suffit de vérifier que AB=AD=BD=DC.
Le repère étant orthonormé

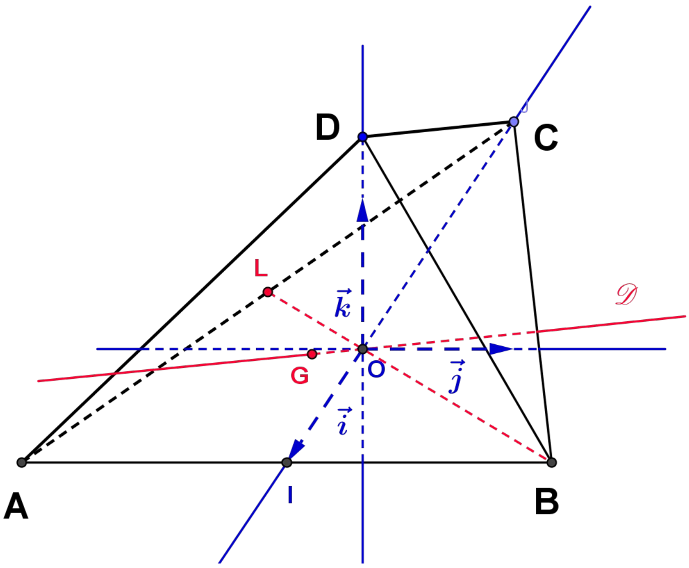
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ $\quad AB^2=(2\sqrt{3})^2=\underline{12}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\quad AD^2=(-1)^2+(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2=1+3+8=\underline{12}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\quad BD^2=(-1)^2+(-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2=1+3+8=\underline{12}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\0\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\quad DC^2=2^2+0^2+(2\sqrt{2})^2=4+0+8=\underline{12}$

Conclusion ;
Le tétraèdre est **régulier**.
On joint une figure en plaçant les points G et L.



Remarque :
On peut démontrer que G est le point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et (DI) et aussi que G est le centre de gravité du triangle ABD (en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle CDI).

