## Exercice 4 — Candidats ayant suivi la spécialité — 5 points

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre les souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces deux compartiments est ouverte pendant 10 minutes tous les jours à midi. On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

. 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après la fermeture de la porte.

. 10 % des souris présentes dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après la fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris.

On pose $a_0 = 0{,}5$ et $b_0 = 0{,}5$.

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on note $a_n$ et $b_n$ les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après la fermeture de la porte. On désigne par $U_n$ la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

**1 .** Soit $n$ un entier naturel.

**a.** Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$.

**b.** Exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$.

**c.** En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

On admet sans démonstration que $U_n = M^n U_0$ ;

**d.** Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

**2 .** Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

**a.** Calculer $P^2$. En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}P$.

**b.** Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

**c.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{1-0{,}7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{2+0{,}7n}{3} \end{pmatrix}$

**3.** En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

**Correction :**
**Partie A**

**1 .a.** $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ $U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

20 % des souris présentes dans le comportement A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après la fermeture de la porte, donc $0{,}2\,a_0$ est la proportion des souris se trouvant dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte et **se trouvant dans le compartiment B après la fermeture** de la porte, et $0{,}8\,a_0$ est la proportion des souris **qui restent dans le compartiment A**.

10 % des souris présentes dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après la fermeture de la porte, donc $0{,}1\,b_0$ est la proportion des souris se trouvant dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte et **se trouvant dans le compartiment A après la fermeture** de la porte, et $0{,}9\,b_0$ est la proportion des souris **qui restent dans le compartiment B**.

A la fermeture de la porte, la proportion $a_1$ des souris étant dans A est $\boxed{0{,}8\,a_0+0{,}1\,b_0}$.

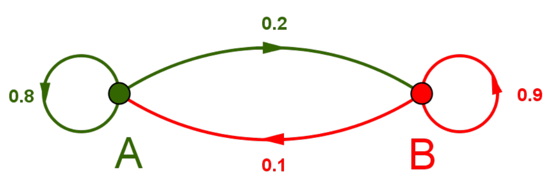
$a_1=0{,}8\times0{,}5+0{,}1\times0{,}5=0{,}4+0{,}05=$ **0,45**.

La proportion $b_1$ , des souris étant dans le comportement B est $\boxed{0{,}2\,a_0+0{,}9\,b_0}$

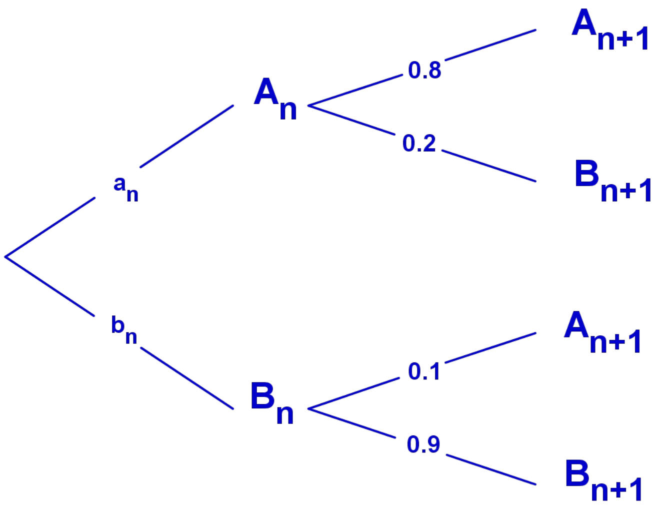
$b_1=0{,}2\times0{,}5+0{,}9\times0{,}5=0{,}1+0{,}045=$ **0,55**.

Conclusion :
$\boxed{U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}}$

**b.** On peut considérer **le graphe probabiliste suivant** :




ou pour tout entier naturel $n$ , on peut considérer **un arbre pondéré**




$$\boxed{a_{n+1}=0{,}8\,a_n+0{,}1\,b_n}$$
$$\boxed{b_{n+1}=0{,}2\,a_n+0{,}9\,b_n}$$

**c.** En utilisant la définition du produit d'une matrice carrée par une matrice colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel $n$ , on admet que $\mathrm{U}_n=\mathrm{M}^n\mathrm{U}_0$

**d.** Pour calculer $\mathrm{M}^3$ , on peut utiliser la calculatrice ou :

$$\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8\times 0{,}8 + 0{,}1\times 0{,}2 & 0{,}8\times 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}9 \\ 0{,}2\times 0{,}8 + 0{,}9\times 0{,}2 & 0{,}2\times 0{,}1 + 0{,}9\times 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}17 \\ 0{,}34 & 0{,}83 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 0{,}66\times 0{,}8 + 0{,}17\times 0{,}2 & 0{,}66\times 0{,}1 + 0{,}17\times 0{,}9 \\ 0{,}34\times 0{,}8 + 0{,}83\times 0{,}2 & 0{,}34\times 0{,}1 + 0{,}83\times 0{,}9 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}562 & 0{,}219 \\ 0{,}438 & 0{,}781 \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{U}^3=\mathrm{M}^3\mathrm{U}_0$$

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}562 & 0{,}219 \\ 0{,}438 & 0{,}781 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}562\times 0{,}5 + 0{,}219\times 0{,}5 \\ 0{,}438\times 0{,}5 + 0{,}781\times 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3905 \\ 0{,}6095 \end{pmatrix}$$

$a_3$ = $\underline{0{,}3905}$ et $b_3$ = $\underline{0{,}6095}$

**3 .** $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

**a.** $$\mathrm{P}^2 = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 1\times 2 & 1{,}1 + 1\times(-1) \\ 2\times 1 + 2\times(-1) & 2\times 1 + (-1)\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$P^2=3I$ donc $I=\frac{1}{3}P^2=\left(\frac{1}{3}P\right)P=P\left(\frac{1}{3}P\right)$

Donc, P est **inversible** et $\boxed{P^{-1}=\frac{1}{3}P}$

**b .** $P^{-1}MP=\frac{1}{3}PMP$

$$PM=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times0{,}8+1\times0{,}2 & 1\times0{,}1+1\times0{,}9\\ 2\times0{,}8-1\times0{,}2 & 2\times0{,}1-1\times0{,}9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1{,}4 & -0{,}7\end{pmatrix}$$

$$PMP=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1{,}4 & -0{,}7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times2 & 1\times1+1\times(-1)\\ 1{,}4\times1-0{,}7\times2 & 1{,}4\times1-0{,}7\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2{,}1\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{3}PMP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0{,}7\end{pmatrix}=$ **D**

**c.** On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 on a : $M^n=PD^nP^{-1}$

**. Initialisation :**

Pour $n=1$

Nous avons vu que $P^{-1}MP=D$

Donc, $P(P^{-1}MP)=PD$

$(PP^{-1})MP=PD$

$IMP=PD$

$MP=PD$

$(MP)P^{-1}=PDP^{-1}$

$M(PP^{-1})=PDP^{-1}$

$MI=PDP^{-1}$

$M=PDP^{-1}$

Soit, $\boxed{M^1=PD^1P^{-1}}$

La propriété est **vérifiée pour n=1**

**. Hérédité :**

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on suppose que $M^n=PD^nP^{-1}$ et on doit démontrer que $M^{n+1}=PD^{n+1}P^{-1}$

$M^{n+1}=M^n\times M=(PD^nP^{-1})\times(PDP^{-1})=PD^n(PP^{-1}P)DP^{-1}=PD^nIDP^{-1}$

$\boxed{M^{n+1}=PD^nDP^{-1}=PD^{n+1}P^{n+1}}$

**. Conclusion :**

**Le principe de récurrence** nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on a :

$\boxed{M^n=PD^nP^{-1}}$

On admet que : $M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{1-0{,}7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{2+0{,}7^n}{3} \end{pmatrix}$

**3 .** Pour tout entier naturel $n$ , on a :

$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n U_0 = M^n \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

Donc, $a_n = \dfrac{1+2\times 0{,}7^n}{6} + \dfrac{1-0{,}7^n}{6} = \dfrac{2}{6} + \dfrac{0{,}7^n}{6}$

$\boxed{a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{0{,}7^n}{6}}$

$b_n = \dfrac{2-2\times 0{,}7^n}{6} + \dfrac{2+0{,}7^n}{6} = \dfrac{4}{6} - \dfrac{0{,}7^n}{6}$

$\boxed{b_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{0{,}7^n}{6}}$

$0 \leqslant 0{,}7 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = \underline{0}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \boxed{\dfrac{1}{3}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

A long terme, $\boxed{\dfrac{1}{3}}$ des souris **sont dans le compartiment A** et $\boxed{\dfrac{2}{3}}$ **dans le compartiment B**.