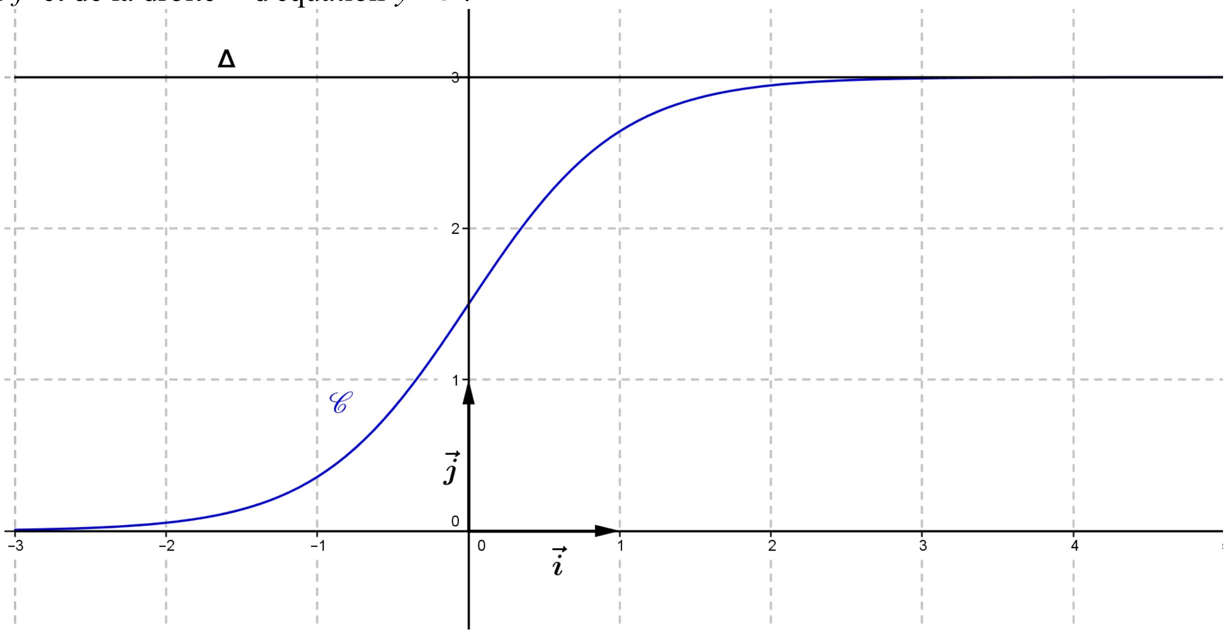
Exercice 1 4 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{3}{1+e^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et de la droite Δ d'équation $y=3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3. Démontrer que l'équation $f(x)=2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ .Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=3-f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x)=-\frac{3}{2}\ln(1+e^{-2x})$. Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un nombre réel strictement positif.

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)\,dx$.

b. Démontrer que $\int_0^a h(x)\,dx=\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$

c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ défini par $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

Correction :

Partie A

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $(\mathrm{e}^{-2x})' = -2\mathrm{e}^{-2x}$, $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-2x}$, $u'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{-u'}{u^2}$

donc pour tout nombre réel x, $\boxed{f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{-2x}}{(1+\mathrm{e}^{-2x})^2}}$

Or, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ donc $f'(x) > 0$

Conséquence

f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = \frac{3}{1+0} = 3$

Conclusion

La droite Δ d'équation $y = 3$ est **une asymptote horizontale** à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

f est une **fonction continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0;3[$, 2,999 appartient à l'intervalle $]0;3[$ donc **le théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une **unique solution** réelle notée α .

En utilisant la calculatrice on obtient pour encadrement de α d'amplitude 10^{-2} , $\boxed{4{,}00 < \alpha < 4{,}01}$.

Partie B

1. Pour tout nombre réel x :

$h(x) = 3 - f(x) = 3 - \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \frac{3+3\mathrm{e}^{-2x}-3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \frac{3\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} > 0$

donc h est **positive** sur $\mathbb{R}$.

2. H est **dérivable** sur $\mathbb{R}$.

On a $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Pour tout nombre réel x

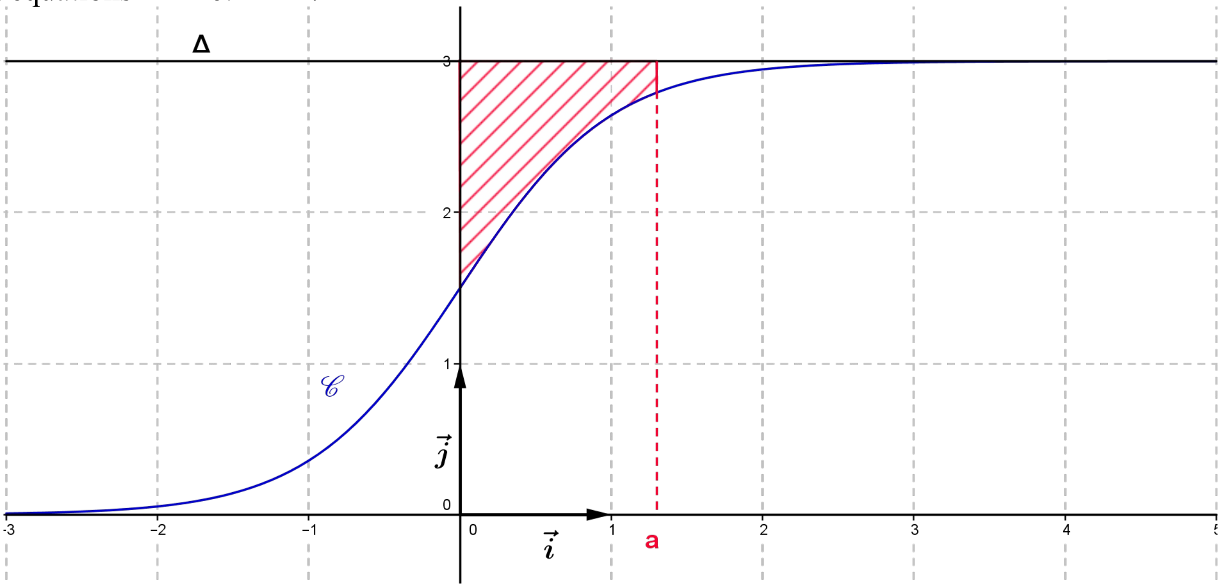
$\mathrm{H}'(x) = -\frac{3}{2}\left(\frac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = \frac{3\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = h(x)$

Donc, H est **une primitive** de h sur $\mathbb{R}$.

3.a. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3$ (la courbe représentative de g est Δ)

Pour tout nombre réel x, on a : $\boxed{h(x)=g(x)-f(x)>0}$. g et f sont continues sur $\mathbb{R}$. a est un nombre réel strictement positif.

Donc, $\int_0^a (g(x)-f(x))\mathrm{d}x = \int_0^a h(x)\mathrm{d}x$ est **l'aire**, en unité d'aire, **du domaine plan compris** entre Δ et $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=a$.



Le domaine plan considéré est la partie de plan hachurée sur la figure précédente.

$$\int_0^a h(x)\mathrm{d}x = \mathrm{H}(a)-\mathrm{H}(0)$$

$$\mathrm{H}(a)=-\frac{3}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{-2a})$$

$$\mathrm{H}(0)=-\frac{3}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{0})=-\frac{3}{2}\ln 2$$

$$\mathrm{H}(a)-\mathrm{H}(0)=-\frac{3}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{-2a})+\frac{3}{2}\ln 2=\frac{3}{2}(\ln 2-\ln(1+\mathrm{e}^{-2a}))$$

$$\mathrm{H}(a)-\mathrm{H}(0)=\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$$

Conclusion

$$\int_0^a h(x)\mathrm{d}x = \boxed{\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)}$$

c. $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-2a}=0$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}} = \frac{2}{1}=2$

et $\lim\limits_{a\to+\infty} (\mathrm{H}(a)-\mathrm{H}(0)) = \frac{3}{2}\ln 2$

Conséquence

L'aire du domaine $\mathscr{D}$, en unité d'aire, est : $\boxed{\frac{3}{2}\ln 2}$.