Exercice 2 5 points

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation : $u_{n+1}=au_n+b$ (a et b réels non nuls tels que $a\neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-\dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1;1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$.

a. Justifier que,pour tout entier naturel n, $h_{n+1}=0{,}75\,h_n+30$

b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n) .
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Correction :

Partie A

1. Pour tout entier naturel n

$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{b}{1-a}=au_n+b-\frac{b}{1-a}$

Or, $u_n=v_n+\frac{b}{1-a}$

$v_{n+1}=a(v_n+\frac{b}{1-a})+b-\frac{b}{1-a}=av_n+\frac{ab+b(1-a)-b}{1-a}$

$\boxed{v_{n+1}=av_n}$

Donc, (v_n) est **une suite géométrique** de raison a.

2. $v_0=u_0-\frac{b}{1-a}$

Pour tout entier naturel n, on a :

$v_n=(u_0-\frac{b}{1-a})a^n$

Or, $-1<a<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} a^n=$ **0**

Conséquences :

$\lim_{x\to n:+\infty} v_n=$ **0**

On a $u_n=v_n+\frac{b}{1-a}$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n=\boxed{\frac{b}{1-a}}$

Partie B

1. En mars 2015, on taille la plante en coupant $\frac{1}{4}$ de sa hauteur.

La hauteur de la plante après la taille de 2015 est donc : $80-\frac{1}{4}\times 80=80-20=$ **60cm**.

La plante poussera de 30 cm au cours des 12 mois suivants.
La hauteur de la plante en mars 2016 avant la taille est : $60+30=$ **90cm**.

2.a. La hauteur de la plante en mars (2015+n) après la taille est : $h_n-\frac{1}{4}h_n=\frac{3}{4}h_n=0{,}75\,h_n$.

Conséquence
La hauteur de la plante en mars (2015+n+1) avant la taille est : $\boxed{h_{n+1}=0{,}75\,h_n+30}$.

b. $h_0=80$ **;** $h_1=90$ **;** $h_2=67{,}5+30=97{,}5$ **. . .**

En utilisant la calculatrice on conjecture : (h_n) **est une suite croissante.**

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que (h_n) est une suite croissante, c'est à dire que pour tout entier naturel n : $h_n \leqslant h_{n+1}$.

Initialisation
$h_0 = 80$ et $h_1 = 90$
donc $h_0 \leqslant h_1$
La propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $h_n \leqslant h_{n+1}$ et on doit démontrer que : $h_{n+1} \leqslant h_{n+2}$.
On multiplie les deux membres de la première inégalité par : 0,75, on obtient :
$0{,}75\,h_n \leqslant 0{,}75\,h_{n+1}$ et en ajoutant aux deux membres : 30, on a : $0{,}75\,h_n + 30 \leqslant 0{,}75\,h_{n+1} + 30$ donc $h_{n+1} \leqslant h_{n+2}$.
(remarque : on peut aussi utiliser que la fonction qui à x associe $0{,}75\,x + 30$ est croissante sur $\mathbb{R}$).

Conclusion
Le principe de récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n : $h_n \leqslant h_{n+1}$ c'est à dire que la suite (h_n) est croissante.

c. En utilisant les résultats de la partie A avec $a = 0{,}75$ et $b = 30$
On peut affirmer que la suite (h_n) est **convergente** et que : $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{30}{1-0{,}75} = \dfrac{30}{0{,}25} = $ **120**.

