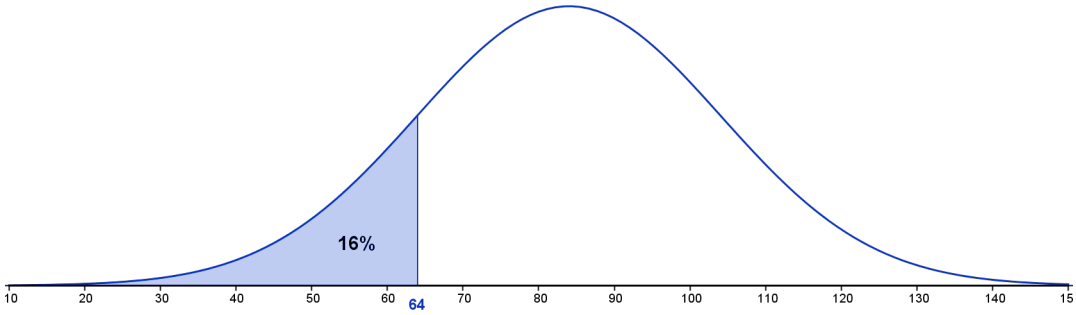
Exercice 3 — 6 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A : Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ de moyenne $\mu=84$ et d'écart type σ. De plus, on a $P(X\leqslant 64)=0{,}16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1.a. En exploitant le graphique, déterminer $p(64\leqslant X\leqslant 104)$.
b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z=\dfrac{X-84}{\sigma}$
a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
b. Justifier que $P(X\leqslant 64)=P\left(Z\leqslant\dfrac{-20}{\sigma}\right)$.
c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

3. Dans cette question, on considère que $\sigma=20{,}1$.
Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.
a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.
b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B : Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années. L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires. Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).
a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.
b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie. Arrondir à 10^{-3}.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires. El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne non réparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année.** Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

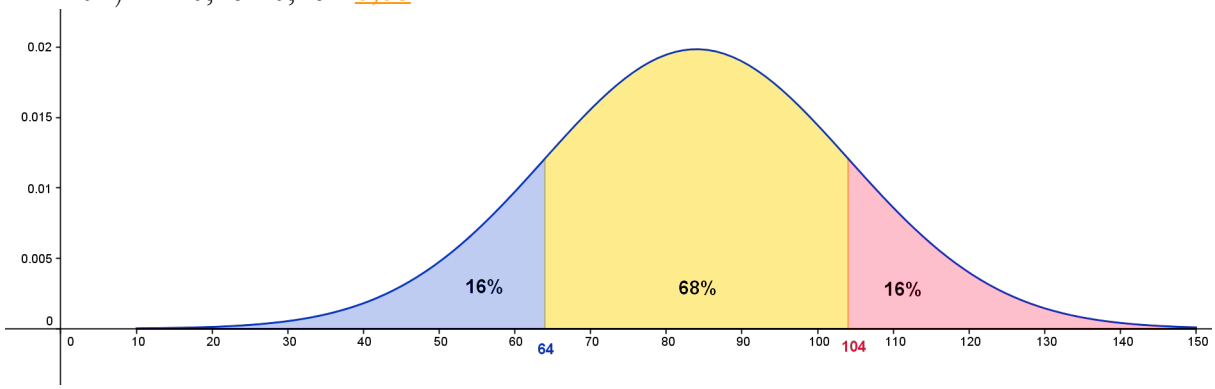
b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Correction :

Partie A : Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

1.a. X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ de moyenne $\mu=84$ et d'écart type σ.
On a $P(X\leqslant 64)=0,16$
et $84-24=20$ et $84+20=104$
donc $P(104\leqslant X)=0,16$
et $P(64\leqslant X\leqslant 104)=1-0,16-0,16=$**0,68**



b. Le cours nous donne :
Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ alors $P(\mu-\sigma;\mu+\sigma)=0,68$ (à 10^{-2} près).
On peut donc proposer **20** pour valeur approchée de σ.

2.a. $Z=\dfrac{X-84}{\sigma}=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$
donc la loi de probabilité de Z est **la loi normale centrée et réduite** : $\mathcal{N}(0;1)$.

b. $X\leqslant 64\Leftrightarrow\dfrac{X-84}{\sigma}\leqslant\dfrac{64-84}{\sigma}\Leftrightarrow Z\leqslant\dfrac{-20}{\sigma}$
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(X\leqslant -0,995)=0,1599$
$P(X\leqslant -0,994)=0,1601$
$P(X\leqslant -0,9945)=0,16$ à 10^{-4} près
donc $-\dfrac{20}{\sigma}=-0,9945$
et $\sigma=\dfrac{20}{0,9945}=$**20,111** à 10^{-3} près

3.a. $\mu=84$ et $\sigma=20,1$
2 ans correspond à **24 mois**, 5 ans correspond à **60 mois**.
On doit déterminer $P(24\leqslant X\leqslant 60)$
En utilisant la calculatrice on obtient :
$P(24\leqslant X\leqslant 60)=$**0,115** à 10^{-3} près.

b. 10 ans correspond à **120 mois**.
On doit déterminer : $P(120\leqslant X)$
En utilisant la calculatrice on obtient :
$P(120\leqslant X)=$**0,037** à 10^{-3} près.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Partie B : Etude de l'extension de garantie d'EL4ectro

1. On considère l'épreuve de Bernoulli, suivante, dans l'ensemble des clients ayant pris une extension de garantie de trois ans supplémentaires. On choisit au hasard un client parmi les clients ayant pris une extension de garantie.

Succès : S « le client a fait jouer l'extension de garantie ». $P(S)=0,115$ (11,5 % des clients ayant pris l'extension de garantie on fait jouer cette extension).

Échec : $\overline{S}$ « le client n'a pas fait jouer l'extension de garantie ». $P(\overline{S})=1-0,115=0,885$

On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie. (Vu le grand nombre de clients, ce choix peut-être considéré comme un tirage avec remise).

On obtient **un schéma de Bernoulli** de paramètres : $n=12$ et $p=0,115$.

a. La loi de probabilité de la variable aléatoire K égale au nombre de succès en 12 épreuves est la loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=0,115$.

La probabilité que 3 exactement de ces clients fassent jouer l'extension de garantie est : $P(K=3)$.

On a $P(K=3)=\binom{3}{12}0,115^{3}\times 0,885^{12-3}$

On obtient en utilisant la calculatrice $P(K=3)=$**0,111** à 10^{-3} près.

b. La probabilité qu'au moins 6 clients fassent jouer l'extension de garantie est : $P(6\leqslant K)$.

On obtient en utilisant la calculatrice $P(6\leqslant K)=$**0,001** à 10^{-3} près.

2.a. Si le client ne fait pas jouer l'extension de garantie alors l'entreprise gagne: 65€ (le prix de l'extension de garantie). Si le client fait jouer l'extension de garantie alors l'entreprise rembourse au client : 399€ et le gain algébrique de l'entreprise est alors de $65-399=-334$ €.

On a $P(Y=-334)=0,115$ et $P(Y=65)=0,885$.

On donne **la loi de probabilité** de Y sous la forme d'un tableau.

y	-334	65
P(Y=y)	0.115	0.885

b. Le gain moyen pour l'entreprise pour chaque client ayant pris l'extension de garantie est égal à $E(Y)$.

$E(Y)=-334\times 0,115+65\times 0,885=19,115$

Cette offre d'extension est financièrement avantageuse pour l'entreprise, le gain moyen moyen par client ayant pris l'extension est égal à **19,11€**.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés