Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives : $M\left(1;1;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $P\left(1;0;-\frac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$. En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

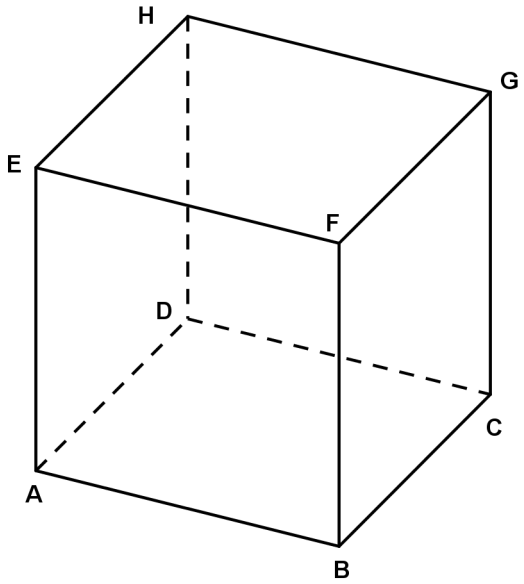
3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.
a. Exécuter à la main cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.
b. A quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?
4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle isocèle en M.

5. On considère le vecteur $\vec{n}(5;-8;4)$ normal au plan (MNP).
a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).
b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.
a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)$.
b. On donne $FK=\sqrt{\frac{27}{35}}$. Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

ANNEXE à remettre avec la copie



Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
l prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times l$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

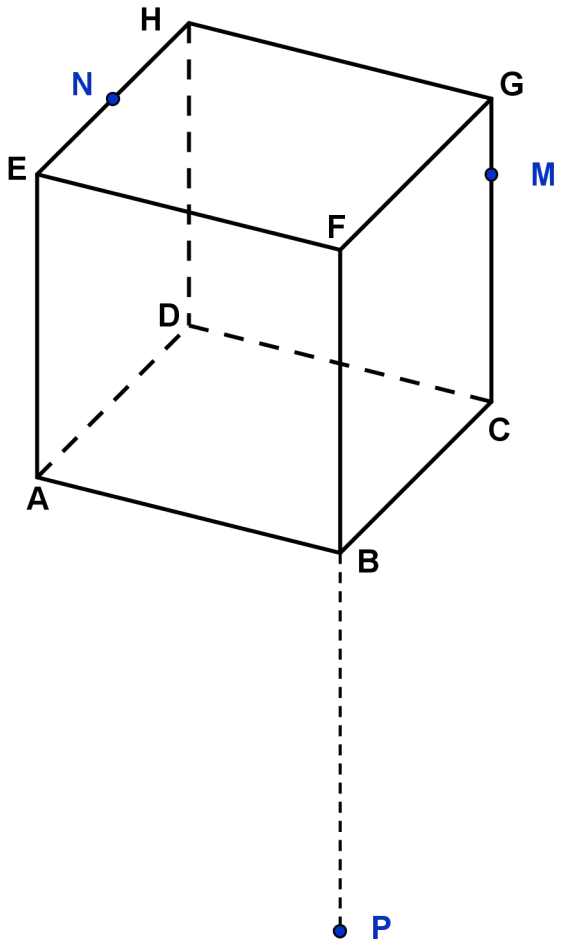
Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
l prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times l$
. . . .

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Correction :

1. ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

$(A\ ;\ \vec{AB}\ ;\ \vec{AD}\ ;\ \vec{AE}\ )$ est un repère orthonormé de l'espace. $M\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0;\frac{1}{2}:1\right)$, $P\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$



2. $\vec{MN}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ $\vec{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{MP}$ **ne sont pas colinéaires** donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

3.a. $d=x_N-x_M=0-1=-1$

$e=y_N-y_M=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

$f=z_N-z_M=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$g=x_P-x_M=1-1=0$

$h=y_P-y_M=0-1=-1$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$i = z_P - z_M = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{8}{4} = -2$

$k = (-1)\times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1) + \frac{1}{4}\times(-2) = 0 + \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$

Le résultat affiché est : **0**

b. $k = (x_N - x_M)\times(x_P - x_m) + (y_N - y_M)\times(y_P - y_M) + (z_N - z_M)\times(z_P - z_M)$

k est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

Ce produit scalaire est nul donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont **orthogonaux** et le triangle MNP est **rectangle en M**.

4. On complète l'algorithme 2

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N z_N, x_P, y_P, z_P$

d prend la valeur $x_N - x_M$

e prend la valeur $y_N - y_M$

f prend la valeur $z_N - z_M$

g prend la valeur $x_P - x_M$

h prend la valeur $y_P - y_M$

i prend la valeur $z_P - z_M$

k prend la valeur $d\times g + e\times h + f\times i$

l prend la valeur $\boxed{d^2 + e^2 + f^2}$

m prend la valeur $\boxed{g^2 + h^2 + i^2}$

Si k=0 et l=m

Afficher « le triangle MNP est rectangle et isocèle en M »

Sinon

Afficher « le triangle n'est pas rectangle et isocèle en M »

5. Remarque

$\vec{n}$ est un **vecteur normal** au plan (MNP) si et seulement s'il est **orthogonal à deux vecteurs non colinéaires** de ce plan.

$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont de vecteurs non colinéaires du plan (MNP).

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 5\times(-1) \pm 8\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\times\left(\frac{1}{4}\right) = -5 + 4 + 1 = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MP} = 5\times 0 - 8\times(-1) + 4\times(-2) = 8 - 8 = 0$

Conclusion

$\vec{n}$ est u**n vecteur normal** au plan (MNP).

a. $L(x;y;z)$ appartient au plan (MNP)

$\Leftrightarrow\ 5(x-1) - 8(y-1) + 4\left(z - \frac{3}{4}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ 5x - 5 - 8y + 8 + 4z - 3 = 0 \Leftrightarrow 5x - 8y + 4z = 0$

(Le plan (MNP) contient le point A).

b. $F(1;0;1)$ $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Δ est la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=5t+1 \\ y=-8t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=4t+1 \end{cases}$$

6.a. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection K du plan (MNP) et de la droite Δ , on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 5x-8y+4z=0 \\ x=5t+1 \\ y=-8t \\ z=4t+1 \end{cases}$$

On obtient l'équation :

$$5(5t+1)-8(-8t)+4(4t+1)=0 \Leftrightarrow 25t+5+64t+16t+4=0 \Leftrightarrow 105t+9=0 \Leftrightarrow t=-\frac{9}{105}=-\frac{3}{35}$$

Conséquence

$$x=5\times\left(-\frac{3}{35}\right)+1=-\frac{3}{7}+1=\frac{4}{7}$$

$$y=-8\times\left(-\frac{3}{35}\right)=\frac{24}{35}$$

$$z=4\times\left(-\frac{3}{35}\right)+1=\frac{-12+35}{35}=\frac{23}{35}$$

$$\boxed{\mathrm{K}\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)}$$

b. Remarque

$$\overrightarrow{\mathrm{FK}}\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{24}{35} \\ -\frac{12}{35} \end{pmatrix} \quad \mathrm{FK}^2=\frac{15^2+24^2+12^2}{35^2}=\frac{225+5\times144}{35^2}=\frac{45+144}{35\times7}=\frac{189}{35\times7}=\frac{27}{35}$$

donc $\mathrm{FK}=\sqrt{\frac{27}{35}}$.

L'unité de volume est le volume du cube ABCDEFGH. L'unité d'aire est l'aire du carré ABCD.

Le volume V du tétraèdre MNPF est $\boxed{\mathrm{V}=\frac{1}{3}\mathrm{B}\times h}$

B (aire de la base) ici aire du triangle MNP

h (hauteur) ici : FK

Le triangle MNP est rectangle en M

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2}\mathrm{MN}\times\mathrm{MP}$$

$$\mathrm{MN}^2=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{16+4+1}{16}=\frac{21}{16} \quad \mathrm{MN}=\frac{\sqrt{21}}{4}$$

$$\mathrm{MP}^2=1^2+2^2=5 \quad \mathrm{MP}=\sqrt{5}$$

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{4}\times\sqrt{5}=\frac{\sqrt{105}}{8}$$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{105}}{8}\times\sqrt{\frac{27}{35}}=\frac{1}{24}\times\sqrt{\frac{105\times27}{35}}$$

$$\boxed{V=\frac{1}{24}\times\sqrt{81}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}}$$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés