

Exercice 4
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
5 points

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

1. On désigne par a , b et c trois entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(b;c) = 1$.

Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

Si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a .

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.

Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous

$(2^{33} - 1) : 3$	2863311530
$(2^{33} - 1) : 4$	2147483648
$(2^{33} - 1) : 12$	715827883.6

Il affirme que 3 divise $(2^{33} - 1)$ et 4 divise $(2^{33} - 1)$ et 12 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question 1 ?

b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

c. En remarquant que $2 \equiv -1 \pmod{3}$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{10}$

e. En déduire que 7 divise $(2^{33} - 1)$

3. On considère le nombre de Mersenne $(2^7 - 1)$. Est-il premier ? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où $\text{MOD}(N,k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k .

Variables : n est un entier naturel supérieur ou égal à 3

k est un entier naturel supérieur ou égal à 2

Initialisation : Demander à l'utilisateur la valeur de n

Affecter à k la valeur 2

Traitement : Tant que $\text{MOD}(2^n - 1) \neq 0$ et $k \leq \sqrt{2^n - 1}$

Affecter à k la valeur $k+1$

Fin de Tant que

Afficher k

Si $k > \sqrt{2^n - 1}$

Afficher « CAS 1 »

Sinon

Afficher « CAS 2 »

Fin de Si

a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n=33$? Et si on saisit $n=7$?

b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?

Correction :

1. a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(b;c) = 1$.

Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

Si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a .

Si b divise a alors **il existe un entier naturel** non nul k tel que $a = kb$.

Si c divise $a = kb$ et c est premier avec b alors **le théorème de Gauss** nous permet d'affirmer que c divise k donc il existe un entier naturel non nul k' tel que $k = k'c$.

Conséquence

$a = kb = (k'c)b = k'(bc)$ et **bc divise a** .

2.a. $\text{PGCD}(3;4)=1$

Si on suppose que $b=3$ divise $a=2^{33}-1$ et que $c=4$ divise $a=2^{33}-1$ alors $bc=3 \times 4=12$ divise $a=2^{33}-1$.

Or, l'élève affirme que 12 ne divise pas $a=2^{33}-1$

Donc **cette affirmation contredit le résultat démontré à la question 1.**

b. $2^{33}-1 \equiv -1 \pmod{2}$ ou $2^{33}-1 \equiv 1 \pmod{2}$ donc $2^{33}-1$ **n'est pas un nombre pair**

Et, $2^{33}-1$ **n'est pas divisible par 4.**

c. $2 \equiv -1 \pmod{3}$ et $2^{33} \equiv (-1)^{33} \pmod{3}$ soit $2^{33} \equiv -1 \pmod{3}$

$2^{33}-1 \equiv -1-1 \pmod{3}$ et $2^{33}-1 \equiv -2 \pmod{3}$ soit $2^{33}-1 \equiv 1 \pmod{3}$

donc le reste de la division euclidienne de $2^{33}-1$ par 3 est égal à 1.

Conséquence

3 **ne divise pas** $2^{33}-1$.

d. $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{10}$

S est **la somme des 11 premiers termes** de la **suite géométrique** (u_n) de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=2^3$.

Pour tout entier naturel n : $u_n = 1 \times (2^3)^n$

$u_n = (2^3)^n$, en particulier tous les termes de la suite (u_n) sont des entiers naturels, et $q \neq 1$ donc :

$$S = \frac{u_{11} - u_0}{q - 1} = \frac{(2^3)^{11} - 1}{2^3 - 1} = \frac{2^{33} - 1}{8 - 1} = \frac{2^{33} - 1}{7}$$

e. S est une **somme d'entiers naturels** donc S **est un entier naturel**.

On obtient : $2^{33}-1 = 7 \times S$

Conclusion

7 **divise** $2^{33}-1$.

3. $2^7-1=128-1=127$

127 n'est pas divisible par les nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11 et on a $13^2 > 127$.

On peut donc affirmer que **127 est un nombre premier**.

4.a. $n=33$

$2^{33}-1$ n'est pas divisible par 2, 3 et 4

D'autre part

$$2^{33} = (2^2)^{16} \times 2 = 4^{16} \times 2$$

$$4 \equiv -1 \pmod{5} \text{ et } 4^{16} \equiv (-1)^{16} \pmod{5} \text{ soit } 4^{16} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$4^{16} \times 2 \equiv 2 \pmod{5} \text{ et } 2^{33}-1 \equiv 1 \pmod{5}$$

donc, $2^{33}-1$ **n'est divisible par 5**.

$2^{33}-1$ n'est pas divisible par 6 car $2^{33}-1$ n'est pas divisible par 2.

Nous avons vu que 7 divise $2^{33}-1$.

Conclusion

L'algorithme affichera : **7**

. $n=7$

$2^7-1=127$ est **un nombre premier** donc n'est pas divisible par un nombre entier k compris entre 2 et $\sqrt{127}$.

Le plus grand entier naturel inférieur à $\sqrt{127}$ est 11.

L'algorithme affichera : **12**

b. CAS 2 : Le nombre de Mersenne étudié est divisible par k donc n'est pas premier. L'entier naturel k affiché est le plus petit diviseur (supérieur ou égal à 2) du nombre de Mersenne étudié.

(remarque : le nombre k est nécessairement un nombre premier).

c. CAS 1 : Le nombre de Mersenne étudié est premier. L'entier naturel k affiché est le plus petit entier naturel dont le carré est strictement supérieur à 2^n-1 .