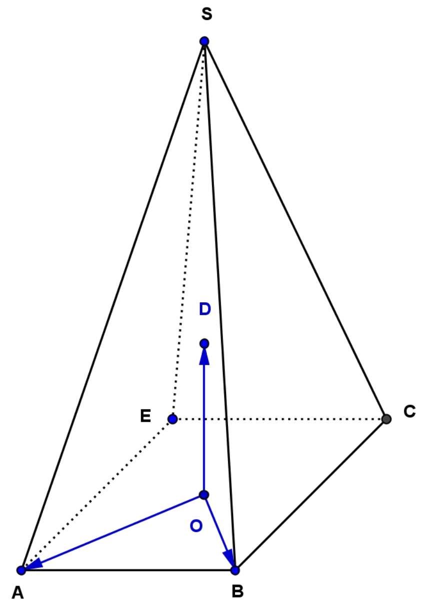
Exercice 1 — 5 points

Dans l'espace, on considère une Pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OD})$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0;0;3)$ dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en annexe 1. (à rendre avec la copie).

2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) est de la droite (BC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure de l'annexe 1.

3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6};-\frac{1}{6};0\right)$. Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U du trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est : $\frac{5\sqrt{43}}{18}$

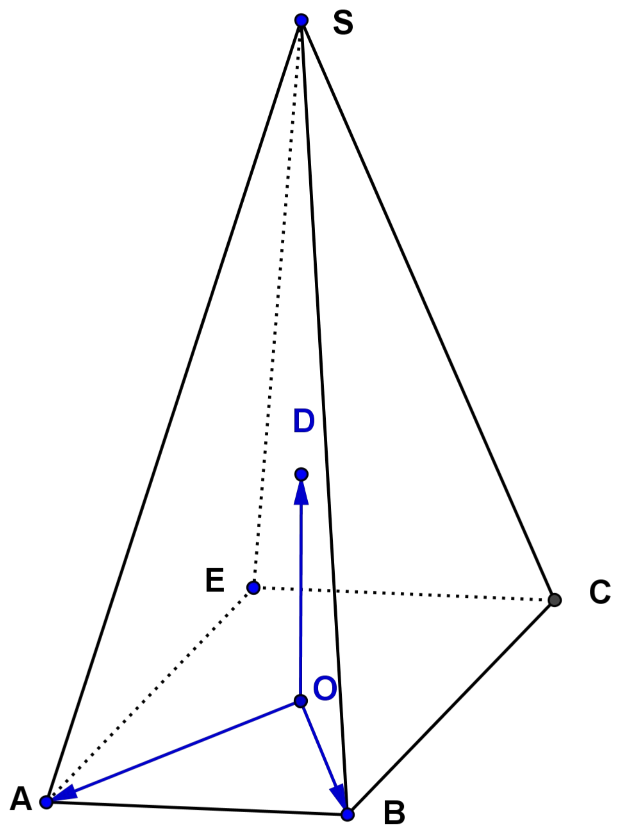
1. On admet que le point U a pour coordonnées : $\left(0;\frac{2}{3};1\right)$. Vérifier que le plan (EAU) a pour équation : $3x-3y+5z-3=0$

2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.

3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).

4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(rendre avec la copie)



Correction :

Partie A

1. Les points O ; D et S sont **alignés** car $O(0;0;0)$; $D(0;0;1)$; $S(0;0;3)$ donc : $\overrightarrow{OS}=3\overrightarrow{OD}$.
Le plan (SOB) et le plan d'équation $z=1$ (parallèle au plan (ABCE)) sont **sécants**. La **droite d'intersection** est (DU).
Le plan (SOB) et le plan (ABCE) sont **sécants**, **la droite d'intersection** est (OB).
Les droites (DU) et (OB) sont donc **parallèles**.
Conséquence
U est le point d'intersection de (SB) et de la parallèle à (OB) passant par D.

2. Les plans (EAU) et (SBC) sont sécants car U appartient à (SBC).
La droite (AE) contenue dans le plan (EAU) est parallèle à la droite (BC) contenue dans le plan (SBC), **le théorème du toit** nous permet d'affirmer que la droite (Δ) d'intersection des plans (EAU) et (SBC) est **parallèle à (BC) et à (AE)**.
(SC) est contenue dans le plan (SBC) et n'est pas parallèle à (BC) donc (BC) et (Δ) sont sécantes. On note V leur point d'intersection.
(Δ) =(UV) et le point d'intersection de (EAU) et (SC) est V.
Conséquence
V est le point d'intersection de (SC) et de la parallèle à (BC) passant par U.

3. On admet que les coordonnées de U sont $\left(0;\frac{2}{3};1\right)$.

Justification non demandée
Le plan (SOB) est le plan d'équation $x=0$.
U appartient à ce plan donc $x_U=0$.
On sait que $z_U=1$.
Les triangles SOB et SDU forment une configuration de Thalès,
SO=3 ; SD=2 (car OD=1) ; OB=1, on obtient $\frac{SD}{SO}=\frac{DU}{OB}$ soit $\frac{2}{3}=\frac{DU}{1}$
$DU=\frac{2}{3}$ donc $y_U=\frac{2}{3}$ et $\boxed{U\left(0;\frac{2}{3};1\right)}$

$K\left(\frac{5}{8};-\frac{1}{6};0\right)$ $\quad A(1;0;0)$ $\quad E(0;-1;0)$

$\overrightarrow{UK}\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ -\frac{1}{6}\\ -1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{UK}.\overrightarrow{AE}=\frac{5}{6}\times(-1)+\left(-\frac{5}{6}\right)\times(-1)+(-1)\times 0=-\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{UK}$ et $\overrightarrow{AE}$ **sont orthogonaux**.

$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires donc K appartient à (AE).
Conséquence :
(UK) et (AE) sont perpendiculaires donc K est le pied de la hauteur du trapèze AEVU issue de U.

Partie B

On admet que l'aire du trapèze AEUV est égale à $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

Justification non demandée

OAB est un triangle rectangle isocèle, donc d'après le théorème de Pythagore $OA^2+OB^2=1^2+1^2=2$
donc $AB=\sqrt{2}$ et $AE=BC=CE=\sqrt{2}$

$S(0;0;3)$ $B(0;1;0)$ $U\left(0;\frac{2}{3};1\right)$ $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SU}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SU}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}$

Les triangles SBC et SUV forment une configuration de Thalès donc :

$\frac{UV}{BC}=\frac{SU}{SB}=\frac{2}{3}$ $UV=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\overrightarrow{UK}\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{5}{6}\\-1\end{pmatrix}$ $UK^2=\frac{25}{36}+\frac{25}{36}+1=\frac{86}{36}$ $UK=\frac{\sqrt{86}}{6}$

On note $\mathscr{A}$ l'aire du trapèze AEUV

$$\mathscr{A}=\frac{(AE+UV)\times AK}{2}=\frac{\left(\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)\times\frac{\sqrt{86}}{6}}{2}=\frac{5\sqrt{2}\sqrt{86}}{36}=\frac{10\sqrt{86}}{36}$$

$$\mathscr{A}=\boxed{\frac{5\sqrt{86}}{18}}$$

1. Les points E;A et U ne sont pas alignés, il suffit de vérifier que les coordonnées des trois points sont des solutions de l'équation : $3x-3y+5z-3=0$.

$A(1:0;0)$ $3\times1-3\times0+5\times0-3=3-3=0$

$E(0;-1;0)$ $3\times0-3\times(-1)+5\times0-3=3-3=0$

$U\left(0;\frac{2}{3};1\right)$ $3\times0-3\times\frac{2}{3}+5\times1-3=-2+5-3=0$

donc (EAU) : $\boxed{3x-3y+5z-3=0}$

2. $\vec{N}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EAU) donc un vecteur directeur de (*d*) et $S(0;0;3)$.

On obtient pour représentation de (d) :

$$(d) : \begin{cases} x=3t+0 \\ y=-3t \\ z=5t+3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

3. Pour déterminer les coordonnées du point H, on résout le système :

$$\begin{cases} 3x-3y+5z-3=0 \\ x=3t \\ y=-3t \\ z=5t+3 \end{cases}$$

On obtient :

$$9t+9t+25t+15-3=0 \Leftrightarrow 43t=-12 \Leftrightarrow t=-\frac{12}{43}$$

$$x=3\times\left(-\frac{12}{43}\right)=-\frac{36}{43}$$

$$y=-3\times\left(-\frac{12}{43}\right)=\frac{36}{43}$$

$$z=5\times\left(-\frac{12}{43}\right)+3=\frac{-60+129}{43}=\frac{69}{43}$$

$$\boxed{H\left(-\frac{36}{43};\frac{36}{43};\frac{69}{43}\right)}$$

4. $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix} -\frac{36}{43} \\ \frac{36}{43} \\ -\frac{60}{43} \end{pmatrix}$

$$SH^2=\frac{36^2+36^2+60^2}{43^2}=\frac{(12\times3)^2+(12\times3)^2+(12\times5)^2}{43^2}=\frac{12^2(9+9+25)}{43^2}$$

$$SH^2=\frac{12^2\times43}{43^2}=\frac{12^2}{43}$$

$$SH=\frac{12}{\sqrt{43}}$$

Volume de la pyramide SAEVU

$$V=\frac{1}{3}B\times h$$

B est l'aire de la base, ici l'aire du trapèze AUVE

h est la hauteur de la pyramide, ici $SH=\frac{12}{\sqrt{43}}$

$\boxed{V=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{43}}{18}\times\frac{12}{\sqrt{43}}=\frac{10}{9}}$ (en unité de volume).

Le volume de la pyramide SABCE

$V'=\frac{1}{3}\times B\times h$

$B=AE^2=2$ (aire du carré ABCE)

$h=OS=3$

$\boxed{V'=\frac{1}{3}\times 2\times 3=2}$

$V\neq 1$ donc **les deux solides obtenus n'ont pas le même volume**.

ANNEXE (exercice 1)