Exercice 2 — Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées x_n ; y_n de la façon suivante :

$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases}$ et pour tout entier n : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8\,x_n - 0{,}6\,y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6\,x_n + 0{,}8\,y_n \end{cases}$

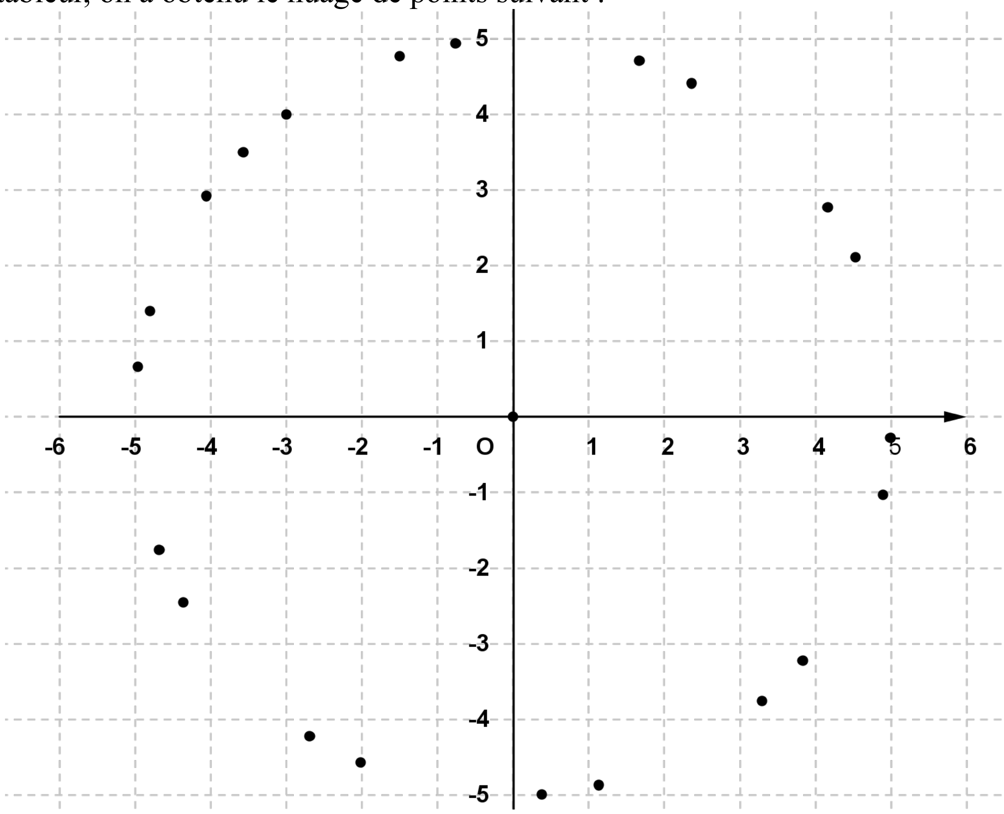
1.a. Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

b. Pour construire les points A_n, ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

Variables : i est un entier
t,x,y sont des nombres réels
Initialisation : x prend la valeur -3
y prend la valeur 4
Traitement : Pour i allant de 0 à 20
  Construire le point de coordonnées $(x\,;y)$
  t prend la valeur x
  x prend la valeur **. . .**
  y prend la valeur **. . .**
Fin Pour

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construis les points A_0 à A_{20}.

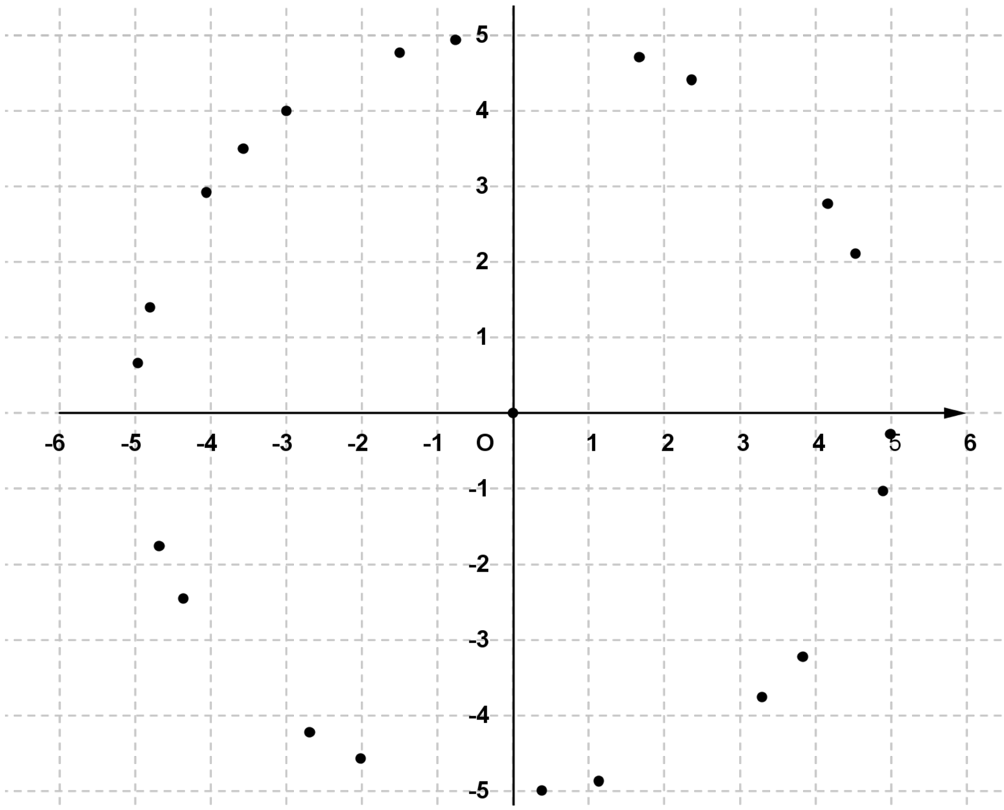
c. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0 , A_1 et A_2 . On les nommera sur la figure jointe en annexe 2. (à rendre avec la copie).
Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout entier naturel n ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout entier naturel n.
Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n=x_n+\mathrm{i}\,y_n$, l'affixe du point A_n .
a. Soit $u_n=|z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n=5$.
Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?
b. On admet qu'il existe un réel θ que $\cos(\theta)=0{,}8$ et $\sin(\theta)=0{,}6$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $e^{\mathrm{i}\theta} z_n=z_{n+1}$.
c. Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n=e^{\mathrm{i}n\theta}z_0$.
d. Montrer que $\theta+\frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0 .
e. Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_0 .
Représenter θ sur la figure jointe en annexe 2,(à rendre avec la copie).
Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} , à partir du point A_n .

Annexe 2 (à rendre avec la copie)



Correction :

1.a. $A_0(-3;4)$
$x_1=0{,}8\times(-3)-0{,}6\times 4=-2{,}4-2{,}4=-4{,}8$
$y_1=0{,}6\times(-3)+0{,}8\times 4=-1{,}8+3{,}2=1{,}4$
$\boxed{A_1(-4{,}8;1{,}4)}$
$x_2=0{,}8\times(-4{,}8)-0{,}6\times 1{,}4=-3{,}84-0{,}84=-4{,}68$
$y_2=0{,}6\times(-4{,}8)+0{,}8\times 1{,}4=-2{,}88+1{,}12=-1{,}76$
$\boxed{A_2(-4{,}68;-1{,}76)}$

b.

Variables : i est un entier
t,x,y sont des nombres réels
Initialisation : x prend la valeur -3
y prend la valeur 4
Traitement : Pour i allant de 0 à 20
Construire le point de coordonnées $(x;y)$
t prend la valeur x
x prend la valeur $\boxed{0{,}8\times t-0{,}6\times y}$
y prend la valeur $\boxed{0{,}6\times t+0{,}8\times y}$
Fin Pour

c. En utilisant les coordonnées, on détermine les points A_0, A_1 et A_2 sur la figure.
Conjecture
Les points A_n appartiennent au cercle de centre O et de rayon 5.

2.a. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n. : $|z_n|=5$ (c'est à dire que $x_n^2+y_n^2=25$) ;

Initialisation
$z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0=-3+4\mathrm{i}$
$|z_0|^2=(-3)^2+4^2=25$ donc $|z_0|=5$
La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose $|z_n|=5$ (c'est à dire que $x_n^2+y_n^2=25$) et on doit démontrer que $|z_{n+1}|=5$ (c'est à dire que $x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=25$).

$x_{n+1}^2=(0{,}8\,x_n-0{,}6\,y_n)^2=0{,}64\,x_n^2-0{,}96\,x_n\,y_n+0{,}36\,y_n^2$
$y_{n+1}^2=(0{,}6\,x_n+0{,}8\,y_n)^2=0{,}36\,x_n^2+0{,}96\,x_n\,y_n+0{,}64\,y_n^2$
$x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=(0{,}64+0{,}36)\,x_n^2+(0{,}36+0{,}64)\,y_n^2=x_n^2+y_n^2=25$

Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $|z_n|=5$
Conséquence
$|z_n|=OA_n=5$ donc tous les points A_n appartiennent au cercle de centre O et de rayon 5.

b. $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et pour tout entier naturel n $z_n = x_n + i\,y_n$

Pour tout entier naturel n

$e^{i\theta} z_n = (\cos\theta + i\sin\theta)(x_n + i\,y_n)$

$e^{i\theta} z_n = (\cos\theta)x_n - (\sin\theta)y_n + i((\sin\theta)x_n + (\cos\theta)y_n)$

$e^{i\theta} z_n = (0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n) = x_{n+1} + i\,y_{n+1} = z_{n+1}$.

c. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $z_n = e^{in\theta} z_0$

Initialisation

Pour $n=0$

$e^{i0} = 1$ donc $z_0 = e^{i0} z_0$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $z_n = e^{in\theta} z_0$ et on doit démontrer que $z_{n+1} = e^{i n+1\theta} z_0$.

$z_{n+1} = e^{i\theta} z_n = e^{i\theta} e^{in\theta} = e^{i n+1\theta} z_0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $z_n = e^{in\theta} z_0$.

d. $z_0 = -3 + 4i = 5\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = 5(-0{,}6 + 0{,}8i)$

Si φ est un argument de z_0

$\cos\varphi = -0{,}6 = -\sin\theta$ $\sin\varphi = 0{,}8 = \cos\theta$

Or, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$ et $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

Donc, $\boxed{\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}(2\pi)}$

est $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument de z_0

e. On suppose que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est le repère orthonormé choisi.

Donc,

$\arg z_0 = (\vec{i}; \overrightarrow{OA_0})(2\pi)$

$\arg z_0 = (\vec{i}; \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA_0})(2\pi)$

Or, $(\vec{i}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

conséquence

$\boxed{(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA_0}) = \theta(2\pi)}$

Pour tout entier naturel n

$z_{n+1} = e^{i\theta} z_n$

$\arg z_{n+1} = \arg e^{i\theta} + \arg z_n (2\pi)$

$\arg z_{n+1} = \theta + \arg z_n (2\pi)$

$\arg z_{n+1} - \arg z_n = \theta(2\pi)$

$(\vec{i}; \overrightarrow{OA_{n+1}}) - (\vec{i}; \overrightarrow{OA_n}) = \theta(2\pi)$

$\boxed{(\overrightarrow{OA_n}; \overrightarrow{OA_{n+1}}) = \theta(2\pi)}$

$OA_n = OA_{n+1} = 5$

A_{n+1} est l'image A_n par **la rotation de centre O et d'angle θ**.

Pour l'annexe 2 on a choisi $n=7$ puis $n=14$

ANNEXE 2