Exercice 2 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

On les matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2 . On donne $M^3=\begin{pmatrix}20 & 10 & 11\\ 12 & 2 & 9\\ 42 & 20 & 21\end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $M^3=M^2+8M+6I$

3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1}=\frac{1}{6}(M^2-M-8I)$

Partie B : Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers *a*, *b* et *c* tels que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points $A(1;1)$, $B(-1;-1)$ et $C(2;5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers *a*, *b* et *c* tels que : $M\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 5\end{pmatrix}$

2. Calculer les nombres *a*, *b* et *c* et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C : Retour au cas général

Les nombres *a*, *b*, *c*, *p*, *q*, *r* sont des entiers. Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(1;p)$, $B(-1;q)$ et $C(2;r)$.

On cherche des valeurs de *p*, *q*, *r* pour qu'il existe une parabole d'équation $y=ax^2+b+c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}p\\ q\\ r\end{pmatrix}$ avec *a*, *b* et *c* entiers alors $\begin{cases}-3p+3q+2r\equiv 0\,(6)\\ 3p-3q\equiv 0\,(6)\\ 6p+2q-2r\equiv 0\,(6)\end{cases}$

2. En déduire que $\begin{cases}q-r\equiv 0\,(3)\\ p-q\equiv 0\,(2)\end{cases}$

3. Réciproquement, on admet que si $\begin{cases}q-r\equiv 0\,(3)\\ p-q\equiv 0\,(0)\\ \text{A , B , C ne sont pas alignés}\end{cases}$ alors il existe trois entiers *a*, *b* et *c* tels que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points A,B et C.

a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r+q-3p=0$.

b. On choisit $p=7$. Déterminer des entiers *q*, *r*, *a*, *b* et *c* tels que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points A, B et C.

Correction :

Partie A

1. $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$M^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\\ 4 & 4 & 1\\ 10 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

On peut utiliser la calculatrice pour obtenir ce résultat.

$M^3=\begin{pmatrix}20 & 10 & 11\\ 12 & 2 & 9\\ 42 & 20 & 21\end{pmatrix}$ On admet ce résultat.

2. $$M^2+8M+6I=\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\\ 4 & 4 & 1\\ 10 & 4 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 8 & 8\\ 8 & -8 & 8\\ 32 & 16 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 10 & 11\\ 12 & 2 & 9\\ 42 & 20 & 21\end{pmatrix}=M^3$$

3. $M^3=M^2+8M+6I \Leftrightarrow M^3-M^2-8M=6I \Leftrightarrow M(M^2-M-8I)=(M^2-M-8I)M=6I$

$\Leftrightarrow M\left[\frac{1}{6}(M^2-M-8I)\right]=\left[\frac{1}{6}(M^2-M-8I)\right]M=I$

donc M est une matrice inversible et $\boxed{M^{-1}=\frac{1}{6}(M^2-M-8I)}$

$$M^2-M-8I=\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\\ 4 & 4 & 1\\ 10 & 4 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ 6 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ 6 & 2 & -2\end{pmatrix}}.$$

Partie B

1. $A(1;1)$ appartient à la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ si et seulement si $1=a+b+c$.

$B(-1;-1)$ appartient à la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ si et seulement si $-1=a-b+c$

$C(2;5)$ appartient à la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ si et seulement si $5=4a+2b+c$

On obtient donc le système : $\begin{cases} a+b+c=1\\ a-b+c=-1\\ 4a+2b+c=5\end{cases}$

On peut écrire en utilisant la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 5\end{pmatrix}$$

Soit $M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$

2. En revenant au système de trois équations à trois inconnues : *a*, *b* et *c* :

$$\begin{cases}a+b+c=1\\a-b+c=-1\\4a+2b+c=5\end{cases}$$

En considérant les deux premières équations

$$\begin{cases}a+b=1-c\\a-b=-1-c\end{cases}$$

On obtient :

$2a=-2c$
$a=-c$

$2b=2$
$b=$**1**

En reportant dans l'équation 3
$4(-c)+2\times1+c=5$ donc $-3c=5-2=3$ soit $c=$**-1** et $a=$**1**
a, *b* et *c* **sont des nombres entiers**.
A, B et C appartiennent à la parabole d'équation : $y=x^2+x-1$.

Partie C

1. Nous devons avoir : $M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$

M^{-1} est **la matrice inverse** de M.

$$M^{-1}\left[M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right]=M^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$$

Soit $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3&1&2\\3&-3&0\\6&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$$

On obtient le système

$$\begin{cases}a=\frac{1}{6}(-3p+q+2r)\\b=\frac{1}{6}(3p-3q)\\c=\frac{1}{6}(6p+2q-2r)\end{cases}$$

Pour que a, b et c soient des nombres entiers il faut que : $\begin{cases} -3p+q+2r\equiv 0(6) \\ 3p-3q\equiv 0(6) \\ 6p+2q-3r\equiv 0(6) \end{cases}$

2. Pour la première congruence modulo 6, on peut écrire : $-3p+q+2r=6\text{K}$ avec K entier relatif.
$6\text{K}\equiv 0(3)$ $\quad 3\equiv 0(3)$ $\quad 2\equiv -1(3)$
On obtient : $\boxed{q-r\equiv 0(3)}$

Pour la deuxième congruence modulo 6, on peut écrire : $3p-3q=6\text{K}'$ avec K' entier relatif.
$6\text{K}'\equiv 0(2)$ $\quad 3\equiv 1(2)$
On obtient : $\boxed{p-q\equiv 0(2)}$

<u>Conclusion</u>
Il faut que :
$\boxed{\begin{cases} q-r\equiv 0(3) \\ p-q\equiv 0(2) \end{cases}}$

3.a. Les trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $a=0$ (ils appartiennent alors à la droite d'équation $y=bx+c$) donc si et seulement si $\boxed{2r+q-3p=0}$
b. On choisit $p=7$
$p-q\equiv 0(2)$
Donc, $q=p+2k$ avec k entier relatif
soit $q=7+2k$

$q-r\equiv 0(3)$
Donc, $r=q+3k'$ avec k' entier relatif
soit $r=7+2k+3k'$

On obtient :
$$a=\frac{1}{6}(-21+7+2k+14+4k+6k')=k+k'$$
$$b=\frac{1}{6}(21-21-6k)=-k$$
$$c=\frac{1}{6}(42+14+4k-14-4k-6k')=7-k'$$

$a\neq 0$ donc $k+k'\neq 0$
On choisit $k=1$ et $k'=0$
On obtient :
$p=7;\ q=9;\ r=9;\ a=1;\ b=-1;\ c=7.$
Les points A$(1;7)$; B$(-1;9)$; C$(2;9)$ appartiennent à la parabole d'équation $y=x^2-x+7$.