

Exercice 3**4 points**

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A : Contrôle avant mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est mise sur le marché si la masse est comprise entre 98 et 102 grammes. La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu=100$ et d'écart type $\sigma=1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier σ .

1. Calculer la probabilité de l'événement M : « la tablette est mise sur le marché ».
2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.
Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

Partie B : Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme. L'entreprise a trois fournisseurs différents.

Le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième apporte 30 % et le dernier apporte 20 %. Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.

On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'événement : « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3 et C l'événement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2} .
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion des fèves non conformes. L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % des fèves qu'elle achète soient conformes. Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

Correction :**Partie A**

1. Nous savons que si X est **une variable aléatoire suivant la loi normale** d'espérance μ et d'écart type σ alors

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,95.$$

Pour notre exemple : $\mu = 100$ et $\sigma = 1$.

$$P(100 - 2 \times 1 \leq X \leq 100 + 2 \times 1) = P(98 \leq X \leq 102) = \mathbf{0,95}$$

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et réduite, pour tout nombre réel α appartenant à l'intervalle $]0; 1[$, il existe **un unique nombre réel strictement positif** u_α tel que : $P(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Par exemple, pour $\alpha = 0,05$, $u_\alpha = 1,96$ $P(-1,96 \leq Y \leq 1,96) = 0,95$

Pour $\alpha = 0,03$, on détermine la valeur de $u_{0,03}$ avec la calculatrice et on obtient $u_{0,03} = \mathbf{2,17}$

donc $P(-2,17 \leq Y \leq 2,17) = 0,97$;

X suit la loi normale d'espérance, $\mu = 100$ et d'écart type σ donc $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit **la loi normale centrée réduite**.

$$P(98 \leq X \leq 102) = 0,97 \Leftrightarrow P\left(\frac{98 - 100}{\sigma} \leq \frac{X - 100}{\sigma} \leq \frac{102 - 100}{\sigma}\right) = 0,97$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-2}{\sigma} \leq Y \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0,97$$

Or, $P(-2,17 \leq Y \leq 2,17) = 0,97$

Donc, $\frac{2}{\sigma} = 2,17$ et $\sigma = \frac{2}{2,17} = \mathbf{0,92}$ à 10^{-2} près

Partie B

1. L'énoncé précise :

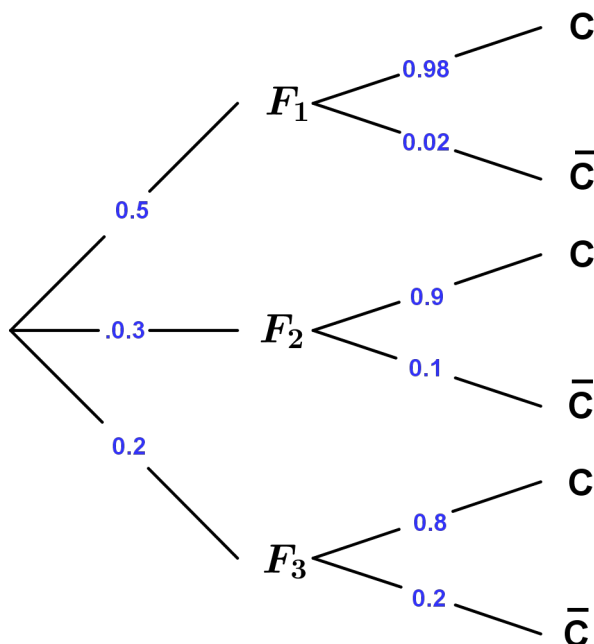
$$P(F_1) = 0,5 ; P(F_2) = 0,3 \text{ et } P(F_3) = 0,2$$

$$P_{F_1}(C) = 0,98 \text{ donc } P_{F_1}(\bar{C}) = 1 - 0,98 = 0,02$$

$$P_{F_2}(C) = 0,9 \text{ donc } P_{F_2}(\bar{C}) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$P_{F_3}(C) = 0,8 \text{ donc } P_{F_3}(\bar{C}) = 1 - 0,8 = 0,2$$

On peut construire **l'arbre pondéré**.



En utilisant **l'arbre pondéré** ou **la formule des probabilités totales**, on obtient :

$$P(C) = P(F_1 \cap C) + P(F_2 \cap C) + P(F_3 \cap C)$$

$$P(C) = 0,5 \times 0,98 + 0,3 \times 0,9 + 0,2 \times 0,8 = 0,49 + 0,27 + 0,16 = 0,92$$

On nous demande de calculer

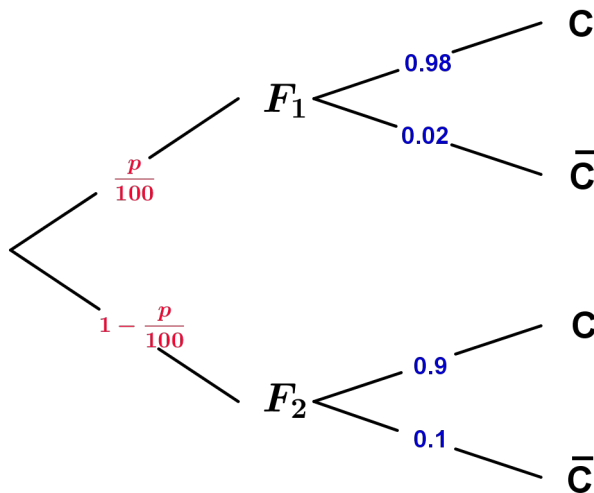
$$P_c(F_1) = \frac{P(F_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,49}{0,92} = \mathbf{0,53} \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

2. Si p est la proportion en pourcentage des fèves achetées au fournisseur 1 alors $P(F_1) = \frac{p}{100}$

Conséquence

$$P(F_2) = 1 - \frac{p}{100}$$

On construit **un nouvel arbre pondéré**.



$$P(C) = P(F_1) \times P_{F_1}(C) + P(F_2) \times P_{F_2}(C)$$

$$P(C) = \frac{p}{100} \times 0,98 + \frac{100-p}{100} \times 0,9$$

on veut obtenir $P(C) = 0,92$

$$\text{donc, } 0,92 = \frac{p \times 0,98}{100} + \frac{(100-p) \times 0,9}{100}$$

$$92 = 0,98p + 90 - 0,9p \Leftrightarrow 2 = 0,08p \Leftrightarrow p = \frac{2}{0,08} = 25$$

Pour atteindre l'objectif, **il faut acheter 25 % du stock de fèves au producteur 1 et 75 % au producteur 2.**