Exercice 5 — 6 points

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x)=\ln(x)+x-3$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2.a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y=\ln(x)$

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)-\ln(x)=\frac{2-\ln(x)}{x}$.

En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $\mathrm{H}(x)=\frac{1}{2}[\ln(x)]^2$ est une primitive de la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=\frac{\ln(x)}{x}$.

Calculer $\int_1^{e^2}\frac{2-\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

Correction :

Partie A

1. u est définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x)=\ln(x)+x-3$.
u est dérivable sur $]0;+\infty[$.
$u'(x)=\frac{1}{x}+1>0$
donc u est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.

2. $u(2)=\ln(2)-1=$ **-0,31** à 10^{-2} près
$u(3)=\ln(3)=$ **1,10** à 10^{-2} près
$u(2)<0$ et $u(3)>0$ donc 0 appartient à l'intervalle $[u(2);u(3)]$ et u est strictement croissante sur cet intervalle, **le théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α appartenant à $[2:3]$.
C'est à dire que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à $[2;3]$.
Si $x>3$ alors $u(x)>u(3)>0$ donc $u(x)\neq 0$.
Si $x<2$ alors $u(x)<u(2)<0$ donc $u(x)\neq 0$
Conclusion
L'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α qui appartient à l'intervalle $[2;3]$. La calculatrice donne $\alpha=$ **2,21** à 10^{-2} près

3. Si $\alpha<x$ alors $u(\alpha)=0<u(x)$
Si $x<\alpha$ alors $u(x)<u(\alpha)=0$
On donne le résultat **sous la forme d'un tableau** :

x	0		α		$+\infty$
u(x)	||	-	0	+	

Partie B

1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2$.

x est un réel strictement positif.
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$
Conséquence
$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\boxed{+\infty}$

2. f est **dérivable** sur $]0;+\infty[$
$f'(x)=\frac{1}{x^2}\times[\ln(x)-2]+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}$
$f'(x)=\frac{\ln(x)-2}{x^2}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{\ln(x)+x-3}{x^2}$

$\boxed{f'(x)=\frac{\mathrm{u}(x)}{x^2}}$

On donne les variations de f sous **la forme d'un tableau**.

x	0		α		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	

On ne nous demande pas de de calculer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
(remarque : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$)

Partie C

1. x appartient à l'intervalle $]0;+\infty[$.

$$f(x)-\ln(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2-\ln(x)=\ln(x)-\frac{\ln(x)}{x}-2+\frac{2}{x}+2-\ln(x)=\frac{2-\ln(x)}{x}$$

$f(x)-\ln(x)=0$ est **l'équation aux abscisses des points d'intersection** de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

$$\frac{2-\ln(x)}{x}=0\Leftrightarrow 2-\ln(x)=0\Leftrightarrow\ln(x)=2\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^2$$

$\ln(\mathrm{e}^2)=2$

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ **ont un seul point d'intersection** : $\boxed{\mathrm{I}(\mathrm{e}^2;2)}$.

2. Pour tout nombre réel x strictement positif

$$g(x)=f(x)-\ln(x)=\frac{2-\ln(x)}{x}$$

$$g(x)=\frac{2}{x}-\frac{\ln(x)}{x}$$

$\mathrm{G}(x)=2\ln(x)-\mathrm{H}(x)$

G est **une primitive** de g sur $]0;+\infty[$

$$\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{2-\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{G}(\mathrm{e}^2)-\mathrm{G}(1)$$

$$\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{2-\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x=2\ln(\mathrm{e}^2)-\frac{1}{2}[\ln(\mathrm{e}^2)]^2-2\ln(1)+\frac{1}{2}[\ln(1)]^2=2\times2-\frac{1}{2}\times2^2=2$$

$$\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{2-\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x=2$$

$2-\ln(x)\geqslant0\Leftrightarrow 2\geqslant\ln(x)\Leftrightarrow \mathrm{e}^2\geqslant x$

Sur l'intervalle $[1;\mathrm{e}^2]$, $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{C}'$ et $\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{2-\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est **l'aire en unités d'aire du domaine plan** compris entre les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}^2$.

On joint une figure non demandée.