Exercice 1 — 6 points

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$. Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0;+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x)=a\,x^2$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en **annexe 1** (*à rendre avec la copie*) les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphiques. Aucune justification n'est demandée.

2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et [Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h_a(x)=\ln x-a\,x^2$.

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x)=0$.

2.a. On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle. Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.
Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	+	0	-	
$h_a(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1-ln(2a)}{2}$	$\searrow$	

b. Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.
On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que a=0,1.
a. Justifier que, dans l'intervalle $\left]0;\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right[$, l'équation $h_{0,1}(x)=0$ admet une solution unique.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0,2}};+\infty\right[$.

b. Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?

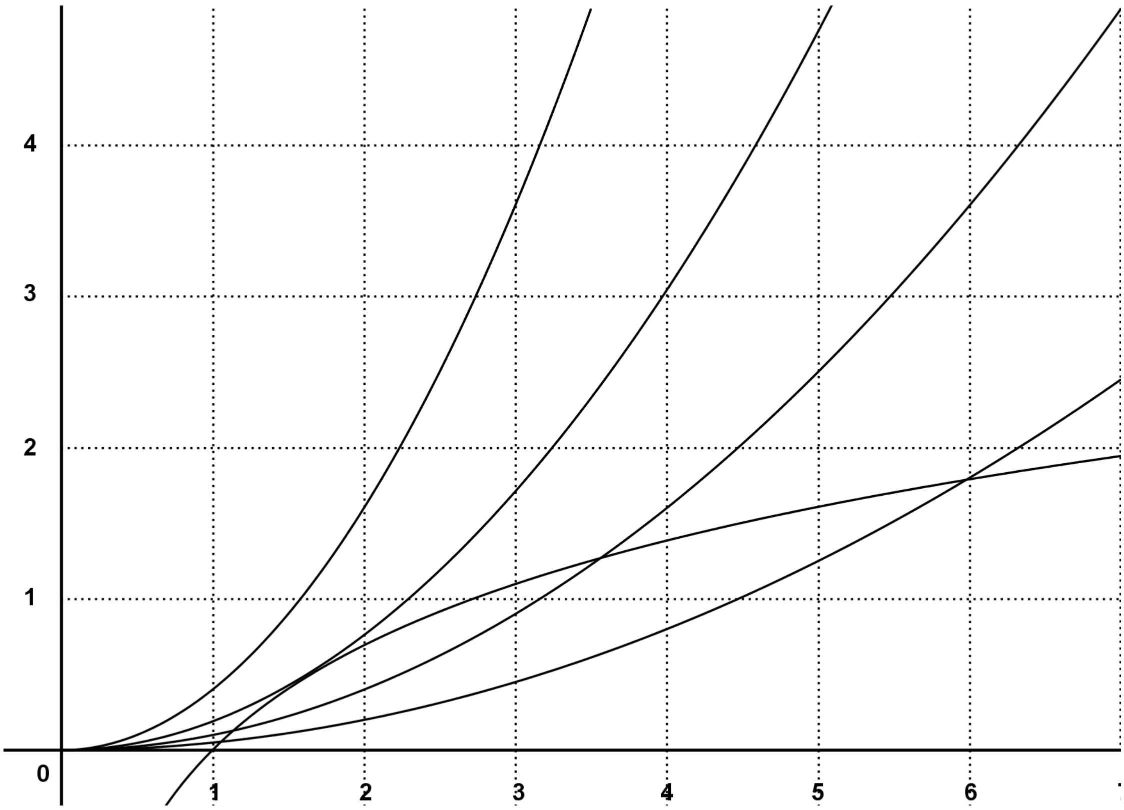
4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a=\dfrac{1}{2e}$.

a. Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$.

b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier.

5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

Annexe 1
(à rendre avec la copie)

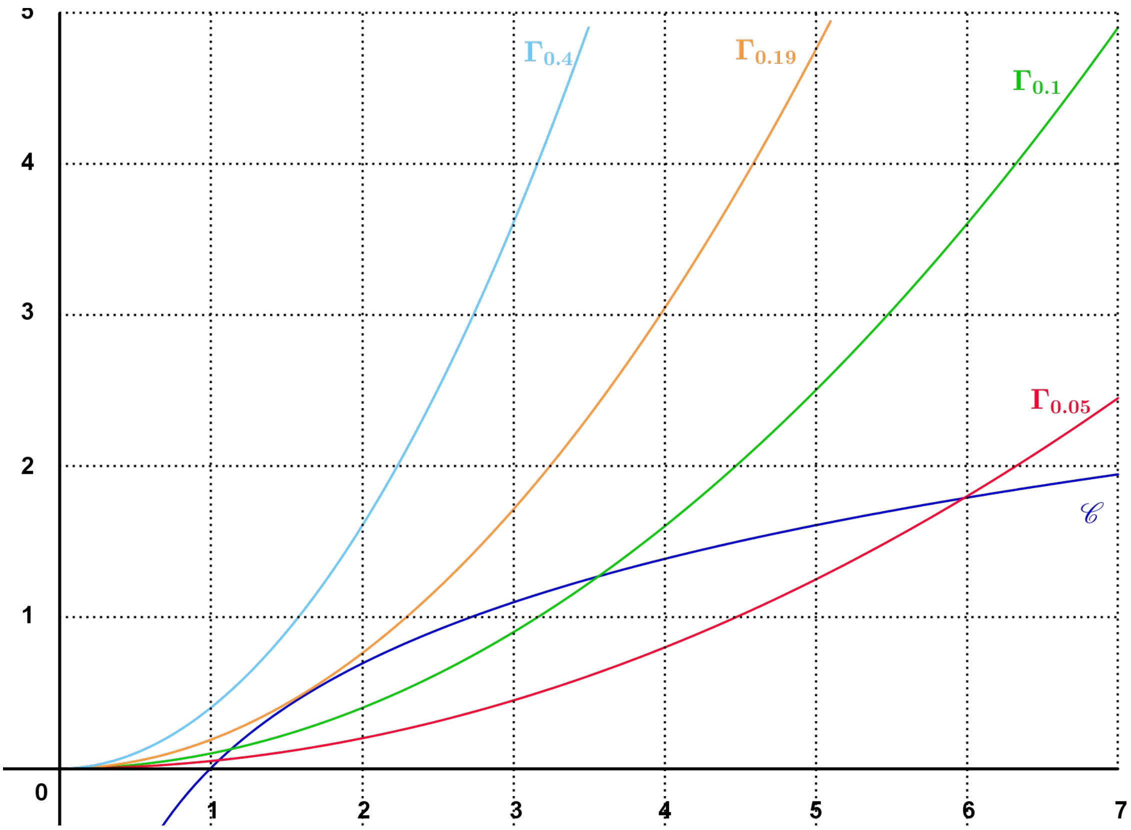


Correction :

x est un nombre réel de l'intervalle $]0;+\infty[$. a est un nombre réel strictement positif. $f(x)=\ln x$ et $g_a(x)=a x^2$.

Partie A

1. $\mathscr{C}$ est la courbe de couleur bleu foncé. $\Gamma_{0,05}$ est la courbe de couleur rouge. $\Gamma_{0,1}$ est la courbe de couleur verte. $\Gamma_{0,19}$ est la courbe de couleur orange. $\Gamma_{0,4}$ est la courbe de couleur bleu clair.



2. Conjecture

$0<a<0{,}19$ **deux points d'intersection**

$a=0{,}19$ **un point d'intersection (ou deux points confondus)**

$0{,}19<a$ **aucun point d'intersection**

Partie B

x est un nombre réel de l'intervalle $]0;+\infty[$. $h_a(x)=\ln x-a x^2$

1. $M(x;y)$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $\begin{cases} y= f(x) \\ y=g_a(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y= f(x) \\ f(x)=g_a(x)\end{cases}$.

Or $f(x)=g_a(x) \Leftrightarrow \ln x=g_a(x) \Leftrightarrow h_a(x)=0$

donc $M(x;f(x))$ est **un point d'intersection** de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $\boxed{h_a(x)=0}$.

2.a. h_a est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$h'_a(x)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{x}=\frac{(1-\sqrt{2a}\,x)(1+\sqrt{2a}\,x)}{x}$$

Le **signe de la fonction dérivée** sur $]0;+\infty[$ est **le signe** de : $\boxed{1-\sqrt{2a}\,x}$

$$1-\sqrt{2a}\,x=0 \Leftrightarrow 1=\sqrt{2a}\,x \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$1-\sqrt{2a}\,x<0 \Leftrightarrow 1<\sqrt{2a}\,x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2a}}<x$$

Conséquence

Si $x>\frac{1}{\sqrt{2a}}$ alors $\boxed{h'_a(x)<0}$ et si $x<\frac{1}{\sqrt{2a}}$ alors $\boxed{h'_a(x)>0}$ et $\boxed{h'_a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=0}$

b. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$$h_a(x)=x\left(\frac{\ln x}{x}-a\,x\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}-a\,x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h_a(x)=\boxed{-\infty}$

3. $a=0,1$

a. $\frac{-1-\ln(0,2)}{2}=0,30$ à 10^{-2} près

$$h_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right)>0$$

$h_{0,1}$ est **continue et strictement croissante** sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$ à valeurs dans $\left]-\infty;h_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right)\right]$. **0 appartient à cet intervalle**, donc **le théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que l'équation $h_{0,1}(x)=0$ admet **une solution unique** dans l'intervalle $\left]0;\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$.

On admet que cette équation admet une solution unique dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0,2}};+\infty\right[$.

b. Il existe donc **deux points d'intersection** entre $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$.

4. $a=\frac{1}{2e}$

a. $\frac{-1-\ln(2\times\frac{1}{2e})}{2}=\frac{-1-\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0$

b. $h_{\frac{1}{2e}}(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{e}$

Il existe **un seul point commun** entre $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$, le point de coordonnées $\boxed{\left(\sqrt{e};\frac{1}{2}\right)}$.

Remarque

Les deux courbes sont tangentes en ce point.

La calculatrice nous donne : $\frac{1}{2e}=0,18$ à 10^{-2}.

5. $\mathscr{C}$ et Γ_a **n'ont pas de point d'intersection** si et seulement si **le maximum** de h_a est **négatif** c'est à dire :

$$\frac{-1-\ln(2a)}{2}<0 \Leftrightarrow -1-\ln(2a)<0 \Leftrightarrow -1<\ln(2a) \Leftrightarrow e^{-1}<2a \Leftrightarrow \frac{1}{2e}<a$$

Conclusion

Si $\boxed{\frac{1}{2e}<a}$ alors **il n'y a pas de point d'intersection** entre $\mathscr{C}$ et Γ_a .