Exercice 2 — 5 points

La partie C peut-être traitée indépendamment des parties A et B.

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda>0$. On rappelle que, pour tout nombre réel a strictement positif, $P(X\leqslant a)=\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée E(X), et définie par : $E(X)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda te^{-\lambda t}\,dt$.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t)=-\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\lambda te^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que : $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt=\frac{1}{\lambda}(-\lambda xe^{-\lambda x}-e^{-\lambda x}+1)$.

2. En déduire que $E(X)=\frac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda>0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2.**

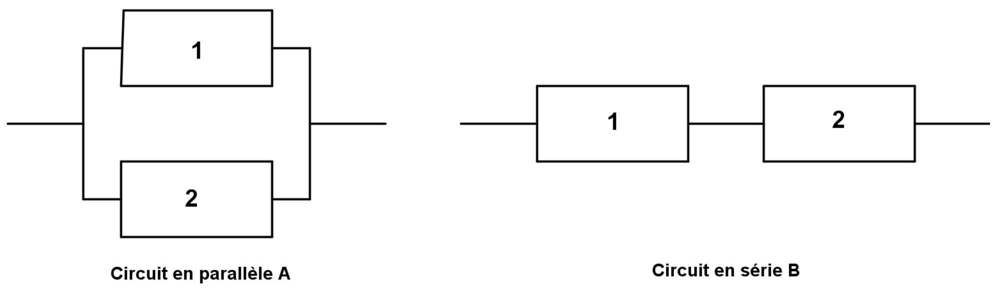
1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie).
a. Représenter la probabilité $P(X\leqslant 1)$.
b. Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

2. On suppose que $E(X)=2$.

a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
b. Calculer la valeur de λ.
c. Calculer $P(X\leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.
d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

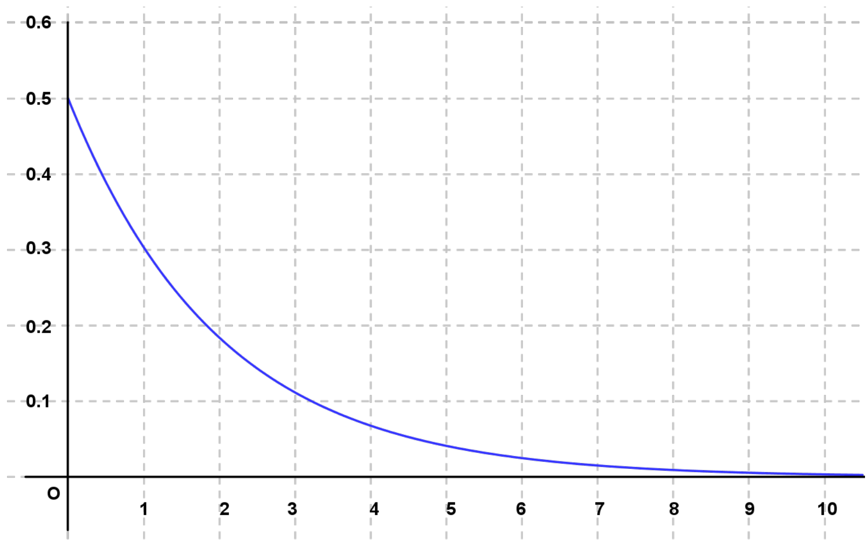
Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'événement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'événement « le composant D_2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1)=P(D_2)=0{,}39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci=dessus.



1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

ANNEXE 2
(à rendre avec la copie)



Correction :

Partie A

1. $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}e^0\right) = -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$

$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \boxed{\frac{1}{\lambda}(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1)}$

2. $\lim_{x \to +\infty} (-\lambda x) = -\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} e^X = 0$ on a aussi $\lim_{X \to -\infty} X e^X = 0$

donc $\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \underline{0}$

on obtient : $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$

Conclusion

$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$.

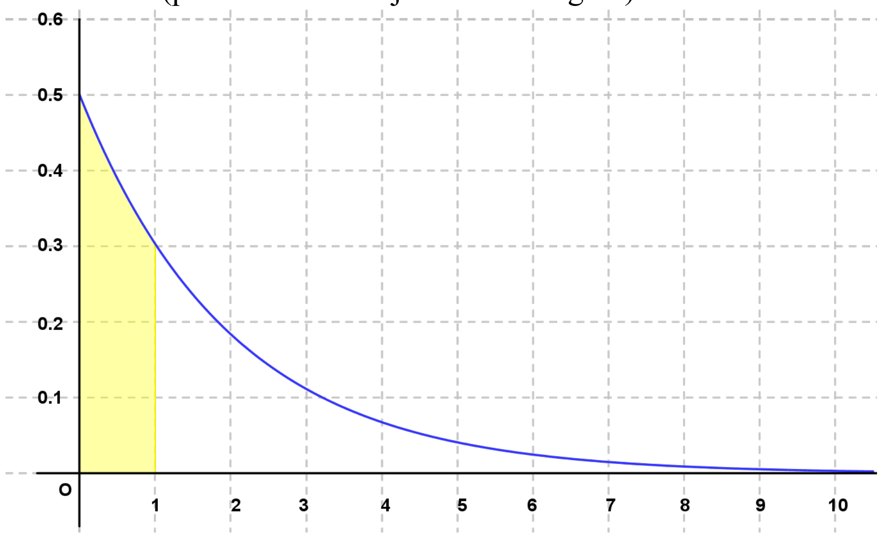
Partie B

1.a. $P(X \leqslant 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt$

$g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

g est **la fonction de densité associée à X**.

Donc $P(X \leqslant 1)$ est **l'aire** en U.A. de la partie de plan comprise entre **la courbe**, **l'axe des abscisses** et **les droites d'équations** $x = 0$ et $x = 1$ (partie colorée en jaune sur la figure).



b. $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $g(0) = \lambda$

Par lecture graphique (ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0), on obtient $g(0) = 0{,}5$ donc $\lambda = \underline{0{,}5}$

2. On suppose que $E(X) = 2$

a. La durée de vie moyenne d'un composant est de **2 ans**.

b. $E(X)=\frac{1}{\lambda}=2$ donc $\boxed{\lambda=\frac{1}{2}=0,5}$.

c. $P(X\leqslant 2)=\int_0^2 g(t)\,dt$

G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=-e^{-\lambda t}=-e^{-0,5t}$ est **une primitive de g** sur $\mathbb{R}$.

$P(X\leqslant 2)=G(2)-G(0)=-e^{-1}+e^{0}=1-\frac{1}{e}$

$P(X\leqslant 2)=0,63$ à 10^{-2} près.

63 % des composants électroniques ont une durée de vie **inférieure à 2 ans**.

d. La loi exponentielle est **une loi de durée de sans vieillissement** c'est à dire :

$P_{(X\geqslant 1)}(X\geqslant 3)=P(X\geqslant 3-1)=P(X\leqslant 2)=1-P(X\leqslant 2)=1-\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$

Partie C

1. Le circuit A est défaillant si et seulement si **les deux composants sont défaillants**, soit l'événement : $\boxed{D_1\cap D_2}$.

Les événements D_1 et D_2 sont indépendants donc $P(D_1\cap D_2)=P(D_1)\times P(D_2)$.

$P(D_1\cap D_2)=0,39\times 0,39=$ **0,15** à 10^{-2} près.

2. Le circuit B est défaillant si et seulement si **l'un au moins des composants est défaillant**, soit l'événement $D_1\cup D_2$.

$P(D_1\cup D_2)=P(D_1)+P(D_2)-P(D_1\cap D_2)$

$P(D_1\cup D_2)=0,39+0,39-0,15=$ **0,63** à 10^{-2} près.