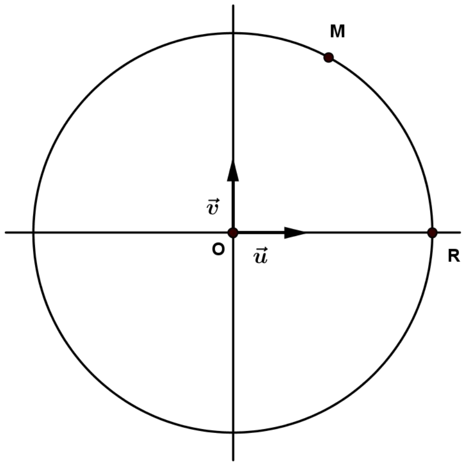
Exercice 3 4 points

Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $[O;\vec{u})$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de *z*.

2. Soit le point M ′ d'affixe z' définie par : $z'=\frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right)$.
Reproduire la figure sur la copie et construire le point M ′ .

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et pour tout entier naturel *n*, par la relation de récurrence : $z_{n+1}=\frac{z_n+|z_n|}{4}$.
Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?

2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?

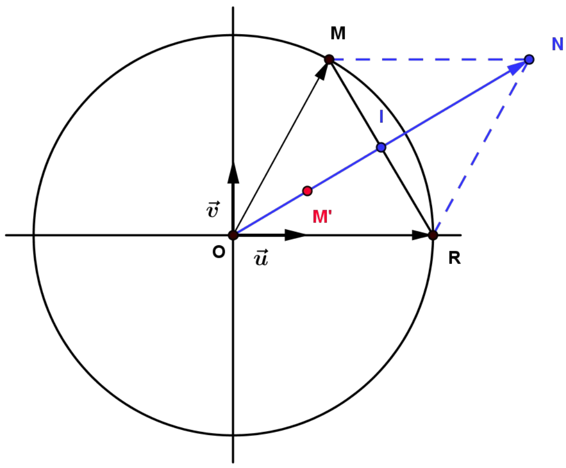
3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

Correction :

Partie A

1. M et R appartiennent au même cercle de centre O donc $\boxed{OM=OR}$.
Or, $OM=|z|$ donc $OR=|z|$.
L'affixe de R est un nombre réel positif.
Conséquence
L'affixe de R est $|z|$.

2. $\overrightarrow{OM}(z)$ et $\overrightarrow{OR}(|z|)$
donc $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{ON}(z+|z|)$.
OMNR est un **parallélogramme** ($OM=OR$ donc ce quadrilatère est **un losange**)
$I\left(\frac{z+|z|}{2}\right)$ I est le milieu de $[ON]$.
(remarque : I est aussi le milieu de $[MR]$).
$\boxed{M'\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right)\right)}$ M′ est **le milieu** de $[OI]$.



Partie B

(z_n) est la suite de nombres complexes définie par z_0 (nombre complexe) et pour tout entier naturel n : $z_{n+1}=\frac{z_n+|z_n|}{4}$.

1. Si z_0 est un réel négatif alors $|z_0|=-z_0$ et $\frac{z_0+|z_0|}{4}=0$.
Donc $z_1=0$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a $z_n=0$.
Conséquence
$\lim_{n\to+\infty} z_n=$ **0**

2. Si z_0 est un réel positif alors $|z_0|=z_0$ et $z_1=\frac{z_0+|z_0|}{4}=\frac{|z_0|}{2}=\frac{z_0}{2}>0$

On veut démontrer en utilisant **un raisonnement par récurrence** que pour tout entier n supérieur ou égal à un, on a $z_n=\frac{z_0}{2^n}$.

Initialisation

Pour $n=1$ $\quad z_1=\frac{z_0}{2}=\frac{z_0}{2^1}$

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on suppose : $z_n=\frac{z_0}{2^n}$ et on doit démontrer que $z_{n+1}=\frac{z_0}{2^{n+1}}$.

Or, $z_{n+1}=\frac{z_n}{2}=\frac{1}{2}\times z_n=\frac{1}{2}\times\frac{z_0}{2^n}=\frac{z_0}{2^{n+1}}$

Conclusion

Le **principe de récurrence** nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $z_n=\frac{z_0}{2^n}$.

Conséquence

$|z_n|=z_n=\frac{z_0}{2^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n|=\mathbf{0}$

3. z_0 n'est pas un nombre réel.

a. En regardant la construction de M' connaissant M on constate que I milieu de $[MR]$ est intérieur au disque de centre O et de rayon $|z|$ et M' est le milieu de $[OI]$ donc $OM'<\frac{1}{2}OM$

Conjecture

La suite $(|z_n|)$ **converge vers 0**.

b. $z_1=\frac{1}{2}\left(\frac{z_0+|z_0|}{2}\right)$

$|z_1|=\frac{1}{2}\left(\frac{|z_0+|z_0||}{2}\right)$

Or $|z_0+|z_0|| \leqslant |z_0|+|z_0|=2|z_0|$

$|z_1|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2|z_0|}{2}\right)=\frac{|z_0|}{2}$

On peut aussi démontrer par **un raisonnement par récurrence** que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a $|z_n|\leqslant\frac{|z_0|}{2^n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|z_0|}{2^n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n|=\mathbf{0}$.

Conclusion : La **limite** de la suite $(|z_n|)$ **ne dépend pas** de z_0 .